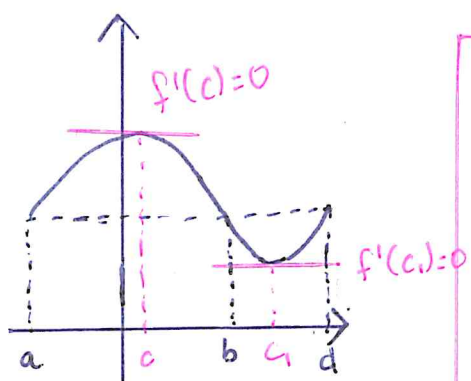


4.2 Medelvärdessatsen



Rolles sats: Låt f vara en funktion och antag:

1. f är definierad och kontinuerlig på $[a, b]$
2. f är deriverbar på (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists c \in (a, b)$ så att $f'(c) = 0$.

Bevis: Fall 1: $f(x)$ är konstant på $[a, b]$

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ för alla } x \in (a, b).$$

Fall 2: $f(x)$ är inte en konstant, f är kontinuerlig på $[a, b]$ så antar f en max och en min på $[a, b]$.

Om både max och min antas i a och $b \Rightarrow f$ är konstant $\rightarrow$ Fall 1. Annars, $\exists c \in (a, b)$ så att $f(c)$ är max eller min $\Rightarrow f'(c) = 0$.

Ex. Visa att $f(x) = x^3 + x - 1$ har endast en rot.

Lösn:
$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \\ f \text{ kontinuerlig} \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ har minst en rot i } (0, 1) \text{ (IVT), dvs } \exists a \in (0, 1) \text{ så att } f(a) = 0.$$

Om f har en annan rot $\Rightarrow \exists b \neq a$ så att $f(b) = 0$.

f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) (polynom) och $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow$ enligt Rolles satsen

$\exists c \in (a, b)$ så att $f'(c) = 0$.

men $f'(x) = 3x^2 + 1 > 1$ Kan inte vara 0.

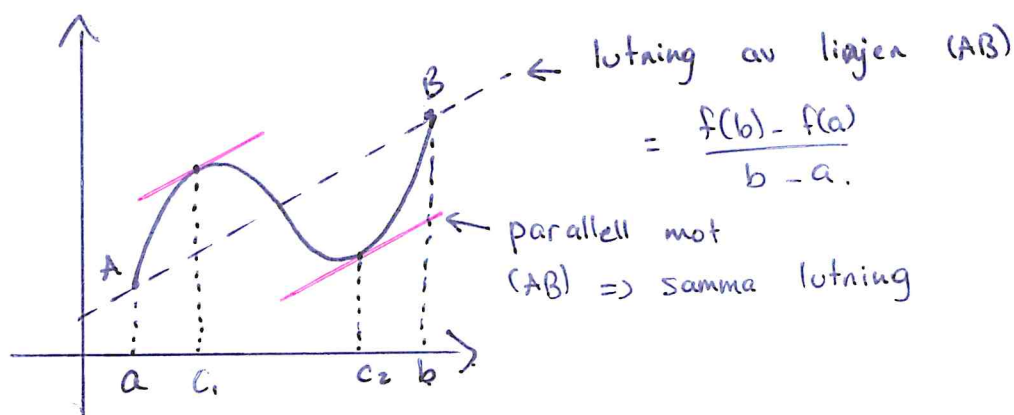
Alltså f har endast en rot.

Medelvärdessatsen

Låt f vara en funktion och antag:

1. f är definierad och kontinuerlig på $[a, b]$
2. f är deriverbar på (a, b)

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) \text{ så att } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Bevis: Ekvation av linjen (AB): $y = kx + m$

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + m.$$

$$(a, f(a)) \in \text{linjen} \Rightarrow f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a + m \Rightarrow m = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a$$

$$\text{Alltså } y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a).$$

Låt $g(x) = f(x) - y$

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none">1. $g(x)$ är def. och kont. på $[a, b]$.2. $g(x)$ är deriverbar på (a, b).3. $\left. \begin{aligned} g(a) &= f(a) - f(a) = 0 \\ g(b) &= f(b) - f(b) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(a) = g(b)$ | $\left. \begin{aligned} &\text{Rolles satsen:} \\ &\Rightarrow \exists c \in (a, b) \text{ så} \\ &\text{att } g'(c) = 0 \end{aligned} \right\}$ |
|--|--|

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Rightarrow g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

Tillämpningar av MVS:

Sats 1) Låt f vara en kontinuerlig och deriverbar funktion på (a, b) och $f'(x) = 0$ för alla $x \in (a, b)$, så är f konstant på (a, b) , ($f(x) = k$ för alla $x \in (a, b)$).

2) Om f och g är kont., deriv. funktioner på (a, b) , om $f'(x) = g'(x) \quad \forall \quad x \in (a, b) \Rightarrow f(x) = g(x) + c$ där c är en konstant.