4.3 Variation av funktioner

Sats: Låt f vara en deriverbar funktion på ett intervall I:

1) $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in I \Rightarrow f$ växande på I
2) $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in I \Rightarrow f$ avtagande på I.

Bevis av 1) Låt $x_1, x_2 \in I$ där $x_1 < x_2$.

f kontinuerlig på $[x_1, x_2]$, deriverbar på (x_1, x_2) så enligt medelvärdessatsen $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ så att

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Eftersom $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

så är f växande.

2) bevisas på samma sätt.

Lokala extremvärden

Första derivata testen: Om c är en kritiskpunkt av en kontinuerlig funktion $f(x)$.

(a) Om f' ändras från positiv till negativ vid c så har f ett lokalt maximum i $x = c$.

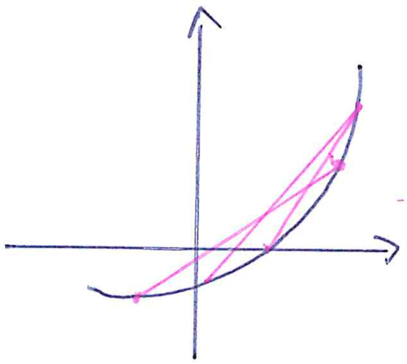
(b) Om f' ändras från negativ till positiv vid c så har f ett lokalt minimum i $x = c$.

Konvexitet och Konkavitet.

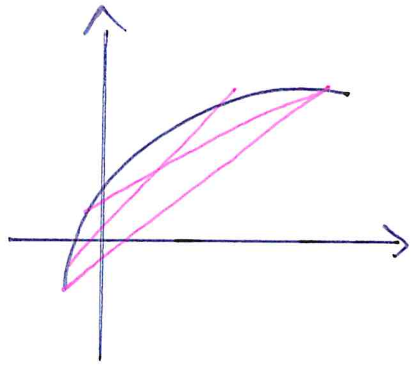
Def: Let f vara en funktion definierad på $[a,b]$.

1. f säges vara **Konvex** (convex or concave upward) på $[a,b]$ om $\forall\ x_1, x_2 \in [a,b]$ gäller det att den räta linjen mellan $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$ ligger ovanför eller på grafen till f.

2. f säges vara Konkav (concave downward) på $[a,b]$ om $\forall\ x_1, x_2 \in [a,b]$ gäller det att den räta linjen mellan $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$ ligger under eller på grafen till f.

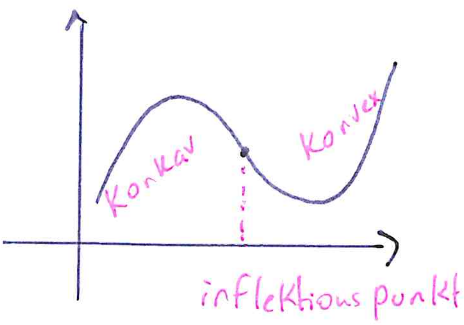


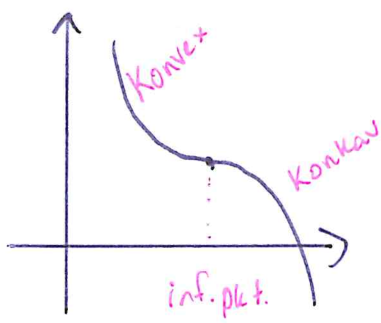
Konvex



Konkav

Def: Om $c \in D_f$ är sådana att f är konvex på en sida av c och Konkav på den andra sidan så Kallas c för en inflektionspunkt. (inflection point)





Sats: Antag att f är två gånger deriverbar på (a,b).

Då gäller att:

(i) Om $f''(x) \geq 0 \quad \forall \; x \in (a,b)$ så är f konvex på (a,b)

(ii) Om $f''(x) \leq 0 \quad \forall \; x \in (a,b)$ så är f konkav på (a,b)

(iii). Om c är en inflektionspunkt så är $f''(c) = 0$.

Ex. Låt $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$. Avgör på vilka intervall är $f(x)$ konvex eller konkav och bestäm inflektionspunkter.

Lösn. $D_f = \mathbb{R}$. $f(x)$ är kontinuerlig och deriverbar på $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{x^2+3-2x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}.$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}. \Leftarrow$ kritiska punkter.

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+3)^2 - 2(x^2+3)\,2x\,(-x^2+3)}{(x^2+3)^4}.$$

$$= \frac{-2x(x^2+3) - 4x(-x^2+3)}{(x^2+3)^3} = \frac{-2x^3 - 6x + 4x^3 - 12x}{(x^2+3)^3}$$

$$= \frac{2x^3 - 18x}{(x^2+3)^3} = \frac{2x(x^2-9)}{(x^2+3)^3}.$$

inflektionspunkter

x		-3		0		3	
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-9	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
	↑ Konkav		↑ Konvex		↑ Konkav		↑ Konvex

$x^2 + 3 > 0$

$\Rightarrow (x^2+3)^3 > 0$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

eller $x = \pm 3$.

Sats (Andraderivatatestet). (second derivative test)

Antag att f är två gånger deriverbar på (a,b) och $c \in (a,b)$.

1) Om $f'(c) = 0$ och $f''(c) < 0$ så är c ett lokalt maximum

2) Om $f'(c) = 0$ och $f''(c) > 0$ så är c ett lokalt minimum

3) Om $f'(c) = f''(c) = 0$ så kan ingen slutsats dras.
(c kan vara lokalt max eller min eller en inflektionpunkt).

Ex. 1) (föregående ex.)

$f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$. kritiska punkter : $x = \pm\sqrt{3}$.

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-9)}{(x^2+3)^3} \Rightarrow f''(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}(3-9)}{(3+3)^3} < 0$$

$f'(\sqrt{3}) = 0$ och $f''(\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ är ett lokalt max.

$$f''(-\sqrt{3}) = \frac{-2\sqrt{3}\cdot(3-9)}{(3+3)^3} = \frac{12\sqrt{3}}{6^3} > 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3} \text{ lokalt min.}$$

2) $f(x) = x^4$. $f'(x) = 4x^3$ och $f''(x) = 12x^2$

$f'(0) = f''(0) = 0$ men $x = 0$ är ett lokalt min