

Övning: I. Låt $f(x) = x^3 + x - 4$.

a) Avgör om $f(x)$ har några lokala eller globala extremvärden på intervallet (a, b) och bestäm så fall dessa.

b) Samma fråga men på intervallet $[0, 3]$.

Lösning a) $f(x)$ är kontinuerlig och deriverbar på $\mathbb{R}$ (polynom)

Om f har ett lokalt (eller globalt) extremvärde på $x=c$ så är $f'(c) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ ($f(x)$ är växande) $\Rightarrow f'(x) = 0$ är olösbar $\Rightarrow$ inget extremvärde.

b). Eftersom $[0, 3]$ är ett stängt intervall
 f kont. på $[0, 3]$ $\Rightarrow f$ har ett

globalt min och ett globalt max.

(i) Inga kritiska punkter

(ii) $f(0) = -4 \leftarrow \text{min.}$

$f(3) = 27 + 3 - 4 = 26 \leftarrow \text{max}$

II. Bestäm den globala min och globala max till

$$f(t) = 2 \cos t + \sin 2t \quad \text{på} \quad [0, \frac{\pi}{2}] \quad (\text{ex. 57 s. 284}).$$

Lösning: f är kont. på $[0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow f$ har max och min

(i) Kritiska punkter:

$$f'(t) = -2 \sin t + 2 \cos(2t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin t = \cos(2t) \quad (\Rightarrow) \quad \cos(2t) = \cos(\frac{\pi}{2} - t).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = \frac{\pi}{2} - t + 2n\pi \\ \text{eller} \quad 2t = -(\frac{\pi}{2} - t) + 2n\pi = -\frac{\pi}{2} + t + 2n\pi \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ \text{eller} \quad t = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi. \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3} \\ t = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Vi tar alla värdena som ligger i $(0, \frac{\pi}{2})$.

$$\Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{6} \quad \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \notin (0, \frac{\pi}{2}) \right. \\ \left. \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{3\pi}{6} < 0 \notin (0, \frac{\pi}{2}) \right)$$

$$\text{alla } t = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \notin (0, \frac{\pi}{2}).$$

$\Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{6}$ är den endast kritiska punkt.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$(ii) \quad f(0) = 2 \cos 0 + \sin 0 = 2 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{2} + \sin \pi = 0.$$

$$(iii) \quad \text{Maxvärde} : f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \text{minvärde} : f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$