Övning

I. Visa att $f(x) = x^3 + 3x - 3$ har endast en rot.

Lösn. $\left.\begin{array}{l} f(0) = -3 \quad <0 \\ f(1) = 1+3-3=1>0 \\ f \text{ Kontinuerlig} \end{array}\right\} \Rightarrow$ (IVT) f har minst en rot i $(0,1)$ dvs $\exists\ a \in (0,1)$ så att $f(a)=0$.

Antag att $f(b)=0$ (f har en annan rot).

1. f Kontinuerlig i $[a,b]$
2. f deriverbar i (a,b)
3. $f(a) = f(b) = 0$

$\Rightarrow$ (Rollessatsen) $\exists\ c \in (a,b)$ så att $f'(c)=0$

$f'(x) = 3x^2 + 3 > 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad f'(c)=0$ är olösbar

$\Rightarrow$ f har endast en rot.

II. Ex. 17 s. 292

$f(x) = (x-3)^{-2}$. Visa att det inte finns $c \in (1,4)$ så att $f(4) - f(1) = f'(c)(4-1)$. Varför är det inte mot MVT?

Lösning: $f(4) = (4-3)^{-2} = 1 \qquad f(1) = (1-3)^{-2} = \frac{1}{4}$

Om c finns $\Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{4} = f'(c)(3) \Rightarrow \frac{3}{4} = f'(c)\cdot 3 \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{4}$.

$f'(x) = -2(x-3)^{-3} \Rightarrow f'(c) = -2(c-3)^{-3} = \frac{1}{4} \Rightarrow (c-3)^{-3} = \frac{-1}{8} \Rightarrow c-3 = -2$

$\Rightarrow c = 1 \notin (1,4)$.

Funktionen är odefinierad på $[1,4]$ (x Kan inte vara 3)

$\Rightarrow$ MVT Kan inte användas.

III. Visa att $\sin x \leq x \quad \forall \; x \in [0, 2\pi]$.

Lösn. Låt $f(t) = \sin t$, och låt $x \in (0, 2\pi)$.

$$\left.\begin{array}{llll} f & \text{är} & \text{kontinuerlig} & \text{i } [0, x] \\ f & \text{är} & \text{deriverbar} & \text{i } (0, x) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{MVT (eller MVS)}:$$

$\exists \; c \in (0, 2\pi)$ så att

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$$

$$\Rightarrow \sin x - \sin 0 = \cos c \, (x - 0)$$

$$\Rightarrow \sin x = x \cos c \leq x$$ eftersom $-1 \leq \cos c \leq 1$ för alla c.

Tentauppgift Bestäm a och b så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{då } x < 1 \\ ax + b & \text{då } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{då } x \geq 2 \end{cases}$$

är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$.

Lösn. f är kontinuerlig då $x < 1$ (Rationel funktion), då $1 < x < 2$ (polynom) och då $x > 2$ (Konstant).

$\Rightarrow$ Det räcker att bestämma a och b så att f blir kontinuerlig i $x = 1$ och $x = 2$.

$x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (ax + b) = a + b \\ f(1) = a + b \end{array}\right\} a + b = 2$$

f kont. i $x = a$ om
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) \\ = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \\ = f(a) \end{cases}$$

$\underline{x=2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2a+b \\ \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1 \\ \\ f(2) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2a+b=1$$

$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \quad a = -1 \quad \text{och} \quad b = 2-a = 3.$$