4.7 Optimering

Derivator används ofta för att lösa optimeringsproblem.

Steg för att lösa optimeringsproblem:

Steg 1: Rita en figur om möjligt.

Steg 2: sätt ut variabler och annan given info

Steg 3: Definiera funktionen f som ska optimeras (i termer av dessa variabler)

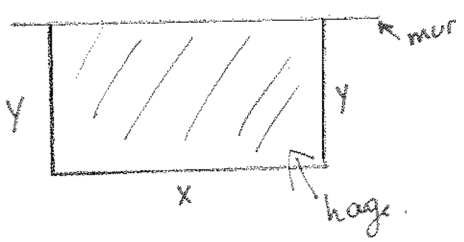
Steg 4: Om f beror av n variabler hitta $n-1$ samband mellan variablerna

Steg 5: Använd sambanden i steg 4 för att skriva f som en funktion av en variabel ($f = f(x)$)

Steg 6: Optimera $f(x)$ (Bestäm max/min).

Ex. En rektangulär hage ska byggas i anslutning till en lång rak mur med ett 100 m långt staket (muren utgör ena sidan av hagen). Vilken är den största möjliga arean för hagen?

Lösn.



y = höjd

x = bred

Vi vill maximera $A = xy$. Vi vet att $\boxed{x + 2y = 100}$

Arean kan skrivas som $A = (100-2y)y = 100y - 2y^2$.

(funktion av en variabel).

Vi vet också att $0 \le y \le 50$.

$\Rightarrow$ Beräkna globala maxvärdet till $A(y) = 100y - 2y^2$ då $y \in [0, 50]$.

* Kritiska punkter:

$A'(y) = 100 - 4y = 0 \Rightarrow y = 25. \Rightarrow A(y) = 100 \cdot 25 - 2 \cdot 25^2 = 2500 - 1250 = 1250$

* $A(0) = 0$

$A(50) = 5000 - 2 \cdot 2500 = 0$

$\Rightarrow$ Den största arean är $1250\ m^2$.

I några exempel kan man inte rita en figur eller det finns bara en variabel.

Ex. (56 s. 339)

I vilken punkt har kurvan $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ en tangent linjen med största lutning?

Lösn. Låt $f(x) = 1 + 40x^3 - 3x^5$.

Lutning av tangent linjen i punkt c är $f'(c) = 120c^2 - 15c^4$.

Vi vill maximera $f'(c)$. Låt $g(c) = f'(c) = 120c^2 - 15c^4$.

Bestäm max till $g(c)$.

$g'(c) = 240c - 60c^3 = 60(4c - c^3) = 60c(4 - c^2) = 60c(2-c)(2+c)$

c		-2		0		2	
$60c$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$4-c^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$g'(c)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(c)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

lokal max: $c = -2$ $c = 2$.

$g(-2) = 120(-2)^2 - 15(-2)^4 = 120 \cdot 4 - 15 \cdot 16 = 240$

$g(2) = 120 \cdot 2^2 - 15 \cdot 2^4 = 240$

$\Rightarrow$ max i $(-2, -223)$ och $(2, 225)$

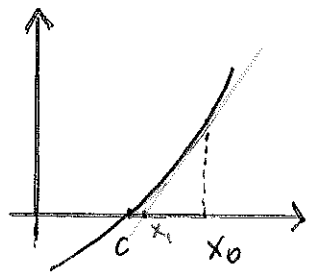
4.8 Newtons metod

I några uppgifter behöver man lösa $f(x)=0$ och ibland är det svårt att få ett exakt svar. Man kan ibland approximera lösningen m.h.a. till exempel en dator. Algoritmen som flesta datorprogrammen använder är Newtonsmetod.

Låt $f(x)$ vara en deriverbar funktion som har en nollställe i $x=c$ ($f(c)=0$) och c är okänd. Låt x_0 vara nära c.

Vi vill approximera c.

Nära x_0 kan man approximera $f(x)$ med sin tangentlinje i x_0 (linjär approximation).



Ekvation av tangentlinjen:

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Tangentlinjen skär x-axeln i punkten x_1 är nära c.

x_1 kallas för en första approximation av c (i boken används andra approximation).

För att bestämma x_1:

$$0 = f'(x_0)(x_1-x_0)+f(x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (\text{om } f'(x_0)\neq 0).$$

För att få en bättre approximation, upprepa proceduren med x_0 ersatt av $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, ..., $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$

<u>Anm.</u> Fördelen av Newtons metod är att den är snabb. Nackdelen är att den beror på x_0 (man måste välja x_0 tillräckligt nära c och $f'(x_0)\neq 0$).

Ex. Approximera ~~av~~ roten av $y = x^3 - 3x - 3 = 0$ mha Newtonsmetod och med startpunkt $x_0 = 2$ (Beräkna x_1, x_2).

Lösning Låt $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

$f'(x) = 3x^2 - 3$.

$f(x_0) = f(2) = 8 - 6 - 3 = -1$

$f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 4 - 3 = 9$.

$\Rightarrow \quad x_1 = 2 + \frac{1}{9} \simeq 2{,}11$. $\qquad f(x_1) \simeq 0{,}7545$.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2{,}11 - \frac{0{,}7545}{10{,}3704} \simeq 2{,}1038.$$

Vi kan fortsätta för att få en bättre approximation men

$c \simeq 2{,}1038 \qquad (f(c) = -3{,}497 \cdot 10^{-5})$.

4.9 Primitiv

Def: En deriverbar funktion F sägs vara en primitiv funktion (antiderivative) till en funktion f på ett intervall I om $F'(x) = f(x) \quad \forall \, x \in (a, b)$.

Vi skriver $F(x) = \int f(x)\,dx$

Ex.

$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ är en primitiv till $f(x)$

eftersom $F'(x) = \dfrac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$.

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} + c$ är också en primitiv till $f(x)$ eftersom $F'(x) = x^2 = f(x)$.

Sats: Om F är en primitiv till f på I så är $F(x)+c$ en primitiv funktion.

Ex. Beräkna primitiv till:

(i) $f(x) = \sqrt{x}$ (ii) $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (iii) $f(x) = \sin(2x)$

(iv) $f(x) = e^{2x}$

Lösn. (i) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \dfrac{x^{3/2}}{3/2} + c = \dfrac{2}{3} x^{3/2} + c$

(ii) $\int \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + c \quad \left(= -\arcsin x + k \right)$

(iii) $\int \sin(2x)\,dx = \int -\frac{1}{2}(-2\sin(2x))\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$

(iv) $\int e^{2x}\,dx = \int \frac{1}{2} 2e^{2x}\,dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$

I allmänt gäller att:

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$$

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c \quad k \neq 0.$$

$$\int \cos(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) + c \quad \alpha \neq 0$$

$$\int \sin(\alpha x) = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x) + c \quad \alpha \neq 0.$$

$\vdots$

Ex. Beräkna $\int \frac{1}{x}dx$.

Lösn. * Om $x > 0 \Rightarrow \int \frac{1}{x}dx = \ln x + c.$

* Om $x < 0 \Rightarrow \int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) + c$ eftersom

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$$

I allmänt $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c.$

Sats Om $F(x)$ är primitiv till $f(x)$ och $G(x)$ är primitiv till $g(x)$ så gäller att:

$F(x) + G(x)$ är en primitiv till $f(x) + g(x)$

$kF(x)$ är en primitiv till $kf(x)$ $\forall k \in \mathbb{R}$

Ex. $$\int \left(2x^4 + e^{2x} - \frac{1}{2}\sin(3x)\right)dx = 2\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{6}\cos(3x) + c$$