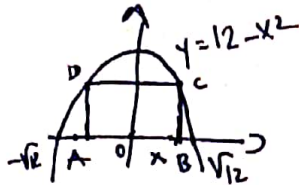


I. En rektangel har basen på x-axeln och de översta hörnerna är på parabolen $y = 12 - x^2$.

Vilken är den största arean kan rektangeln ha och vad är rektangelns storlekar i så fall?

Lös.



Låt ABCD vara rektangeln.

$$OB = x > 0, \quad BC = y = 12 - x^2$$

$$\text{Arean} = A(x) = 2x \cdot (12 - x^2) = 24x - 2x^3, \quad x \in [0, \sqrt{12}].$$

$$A'(x) = 24 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2, \quad \text{men } x > 0 \Rightarrow x = 2.$$

$A(x)$ Kontinuerlig i $[0, \sqrt{12}]$.

$\Rightarrow A(x)$ har en max och min (global).

$$A(0) = A(\sqrt{12}) = 0.$$

$$A(2) = 24 \cdot 2 - 2 \cdot 8 = 48 - 16 = 32.$$

$\Rightarrow$ Den största arean är 32.

Dimensioner:

$$\text{Bredd} = 2x = 4$$

$$\text{höjd} = 12 - x^2 = 12 - 4 = 8$$

$$(8 \cdot 4 = 32).$$

II. Beräkna primitiv av följande funktioner:

$$1) f(x) = 2e^{4x} - x^2 + \frac{1}{x}.$$

$$2) f(x) = x e^{(x^2+1)}$$

$$3) f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Lösning 1) $F(x) = 2 \cdot \frac{e^{4x}}{4} - \frac{x^3}{3} + \ln|x| + c$
 $= \frac{e^{4x}}{2} - \frac{x^3}{3} + \ln|x| + c.$

2) $f(x) = x e^{(x^2+1)} = \frac{1}{2} (2x e^{(x^2+1)}) = \frac{1}{2} u' e^u$
 $\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + c.$

3) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = - \frac{-\sin x}{\cos x} = - \frac{u'}{u}$
 $\Rightarrow F(x) = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c.$

III. Bestäm en primitiv till $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}}$ (Gamla tenta.)

$u = x^3+4 \Rightarrow u' = 3x^2$
 $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+4}} = \frac{1}{3} u' \cdot u^{-1/2}$
 $\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3} \frac{u^{-1/2+1}}{-1/2+1} + c = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + c = \frac{2}{3} (x^3+4)^{1/2} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3+4} + c.$

En primitiv är $F(x) = \frac{1}{3} \sqrt{x^3+4}.$

IV. Bestäm en primitiv till funktionen $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ (Gamla tenta.)

$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$

$\Rightarrow F(x) = x - \tan^{-1} x.$

7 Beräkna 1) $\int (x^{3/2} + 3) \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x} \right) dx$

2) $\int \frac{\tan x}{\sin x \cos x} dx$

Lös. 1) $\int (x^{3/2} + 3) \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x} \right) dx = \int \left(\frac{x^{3/2}}{x} + \frac{3}{x} - x^{3/2} \cdot x^{1/2} - 3x^{1/2} \right) dx$

$$= \int \left(x^{1/2} + \frac{3}{x} - x^2 - 3x^{1/2} \right) dx = \frac{x^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + 3 \ln|x| - \frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} + 3 \ln|x| - \frac{1}{3} x^3 - 2 x^{3/2} + C$$

$$= -\frac{4}{3} x^{3/2} + 3 \ln|x| - \frac{1}{3} x^3 + C$$

2) $\int \frac{\tan x}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x \cos x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + C$

Bestäm definitionsmängden till 1) $f(x) = \ln \left(\frac{2x-1}{x-3} \right)$

2) $g(x) = \sqrt{\ln(\sin^2 x + 1)}$

Lös. 1) $f(x) = \ln \left(\frac{2x-1}{x-3} \right)$

$$x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$$

$$\frac{2x-1}{x-3} > 0$$

$$2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

	$\frac{1}{2}$	3	
$2x-1$	-	0	+
$x-3$	-	-	0
$\frac{2x-1}{x-3}$	+	0	-

$$\Rightarrow D_f = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right) \cup (3, \infty)$$

2) $g(x) = \sqrt{\ln(\sin^2 x + 1)}$

$$\ln(\sin^2 x + 1) \geq 0 \quad \text{och} \quad \sin^2 x + 1 > 0.$$

$$\sin^2 x \geq 0 \Rightarrow \sin^2 x + 1 \geq 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} \sin^2 x + 1 \geq 1 \\ \Rightarrow \ln(\sin^2 x + 1) \geq \ln 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D_g = \mathbb{R}}$$