

Review of algebra och analytic geometry.

Förenkla, Faktorisera, lös ekvationer och olikheter.

Absolutbelopp: $|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$

Ekvationer och olikheter med abs:

$$|E| = k > 0 \Rightarrow E = k \text{ eller } E = -k$$

$$|E| \geq k \Rightarrow E \geq k \text{ eller } E \leq -k \quad (>, \geq, <)$$

$$|E| \leq k \Rightarrow -k \leq E \leq k.$$

Ex. $\left| \frac{2x-1}{x+3} \right| < 3 \quad (\Rightarrow) \quad -3 \leq \frac{2x-1}{x+3} \leq 3$

$$-3 \leq \frac{2x-1}{x+3}$$

$$0 \leq \frac{2x-1}{x+3} + 3 = \frac{2x-1+3x+9}{x+3}$$

$$(\Rightarrow) \quad 0 \leq \frac{5x+8}{x+3}$$

och

$$\frac{2x-1}{x+3} \leq 3$$

$$(\Rightarrow) \quad \frac{2x-1}{x+3} - 3 \leq 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \frac{2x-1-3x-9}{x+3} \leq 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \frac{-x-10}{x+3} \leq 0$$

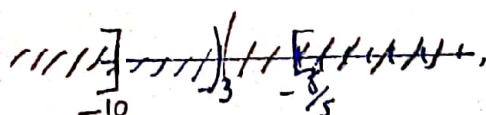
	-3	-8/5	
5x+8	-	-	0 +
x+3	-	0 +	+
5x+8 / x+3	+	-	0 +

$$\Rightarrow \boxed{x \in (-\infty; -3) \cup [-\frac{8}{5}; +\infty)} \quad \textcircled{1}$$

	-10	-3	
-x-10	+	0 -	-
x+3	-	-	0 +
-x-10 / x+3	-	0 +	-

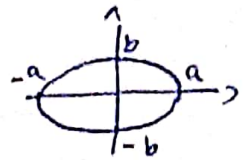
$$\Rightarrow \boxed{x \in (-\infty; -10] \cup (-3; +\infty)} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow x \in (-\infty; -10] \cup [-\frac{8}{5}; +\infty)$$



Cirklar: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ Centrerad i (a,b)
radie = r

Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ centrerad i origo



Linjer: $y = Kx + m$

$(l_1): y = K_1x + m_1$ $(l_2): y = K_2x + m_2$ två linjer

$(l_1) \parallel (l_2) \Leftrightarrow K_1 = K_2$

$(l_1) \perp (l_2) \Leftrightarrow K_1 \cdot K_2 = -1$

Vertikal linje: $x = c$

Horisontal linje: $y = c$

Funktioner: Definitionsmängd - Värdemängd.

Ex. $f(x) = \ln(\sqrt{1-x} + 1)$

$\sqrt{1-x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1-x} + 1 > 0$ ($\ln u$ definierad då $u > 0$)

$1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$ ($\sqrt{1-x}$ " " $1-x \geq 0$)

$\Rightarrow D_f = (-\infty; 1]$

Värdemängden: $\sqrt{1-x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1-x} + 1 \geq 1$
 $\Rightarrow \ln(\sqrt{1-x} + 1) \geq \ln 1 = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

$\Rightarrow V_f = [0, \infty)$

Ni kan också studera variation av $f(x)$ för att bestämma värdemängden.

En funktion f är injektiv om

$$(*) \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{för alla } x_1, x_2 \in D_f$$

eller ekvivalent:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Om f är injektiv så har f en inversfunktion f^{-1}

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad f^{-1}: V_f \rightarrow D_f.$$

$$(D_f = V_{f^{-1}} \quad \text{och} \quad V_f = D_{f^{-1}})$$

För att bestämma f^{-1} , skriv x i termer av y .

ex: $f(x) = \ln(1-x) + 3 \quad D_f = (-\infty; 1)$

$$y = \ln(1-x) + 3 \Leftrightarrow y - 3 = \ln(1-x) \Leftrightarrow 1-x = e^{y-3} \Leftrightarrow x = 1 - e^{y-3}$$

eftersom det finns endast en x för varje y så är f injektiv

och $f^{-1}(x) = 1 - e^{x-3}$.

Anm. För att visa att f är injektiv enligt $(*)$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ln(1-x_1) + 3 = \ln(1-x_2) + 3$$

$$\stackrel{-3}{\Rightarrow} \ln(1-x_1) = \ln(1-x_2)$$

$$\stackrel{e}{\Rightarrow} e^{\ln(1-x_1)} = e^{\ln(1-x_2)}$$

$$\Rightarrow 1-x_1 = 1-x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Anm. f inj och f^{-1} är inversen $\Rightarrow f \circ f^{-1}(x) = x \quad \forall x \in D_{f^{-1}}$
 $f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in D_f$

Ex. av icke-injektiv funktion:

$$f(x) = (x-3)^2 + 4$$

$$y = (x-3)^2 + 4 \Rightarrow y-4 = (x-3)^2$$

$$\Rightarrow x-3 = \pm\sqrt{y-4}$$

$$\Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{y-4} \leftarrow \text{För varje } y$$

det finns 2 x

Exponential funktion : $y = a^x$ $a > 0$ $x \in \mathbb{R}$

naturlig exponential funktion : $y = e^x$ $e \approx 2,71$

$$D_f = \mathbb{R} \quad V_f = (0, \infty)$$

Inversen av exponentiala funktionen: $y = \log_a x$

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

$$D_{\log_a x} = (0, \infty) \quad V_{\log_a x} = \mathbb{R}$$

Om $a = e$, $\log_e x = \ln x$ (Neperian log).

$$x > 0, y > 0$$

Regler: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$(a^x)^p = a^{xp}$$

$$\log_a x^p = p \log_a x$$

$$a^0 = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

Anm. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Anm. $\log_a(xy)$ är definierad
då $xy > 0$ dvs ($x > 0$ och $y > 0$)
eller ($x < 0$ och $y < 0$)
Men $\log x + \log y$ är odefinierad då $x < 0$ och
 $y < 0$.

Gränsvärden:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad e^{\infty} = \infty, \quad e^{-\infty} = 0, \quad \ln \infty = \infty, \quad \ln 0^+ = -\infty$$

Obestämda uttryck: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$.

Om vi får ett obestämt uttryck $\Rightarrow$ Förenkla.

ex.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \arctan x}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \arctan x}{x^2(2 + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 4x}) = \infty - \infty$$

$$\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 4x} = \frac{(\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 4x})}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 4x}} = \frac{x^2 + 2 - x^2 + 4x}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 4x}}$$

$$= \frac{4x + 2}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 4x}} = \frac{x(4 + \frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + |x|\sqrt{1 - \frac{4}{x}}}$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow = \frac{x(4 + \frac{2}{x})}{-x(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{4}{x}})} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{-2} = -2.$$

~~H.R.~~ Hopitalregel.

$$\text{Om } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ eller } \pm \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\text{ex. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) = \infty - \infty$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x \ln x}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{H.R.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(\ln x + \frac{1}{x} \cdot x)}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -(\ln x + 1) = +\infty \end{aligned}$$

Instängningsregel:

$$f(x) < g(x) < h(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

$$\text{Om } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = G$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = G.$$

Några gränsvärden:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u} = 0$$

Kontinuitet: $f(x)$ är kontinuerlig i $a \in D_f$ om

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Ex. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & x < 0 \\ -e^x - 2 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x - 3) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-e^x - 2) = -e^0 - 2 = -3 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$$

Men $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0) = 1 \Rightarrow f$ är inte kontinuerlig i $x=0$

Derivator: f är deriverbar i $x=a$ om

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existerar eller } \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

$$\text{I så fall } f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Derivatan av en funktion: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$	$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Konstant $\rightarrow c$	0	$\cos x$	$-\sin x$	$\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$		$= \frac{1}{\cos^2 x}$		

Kedje regel: om $f = f(u)$ där $u = u(x)$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = u' f'(u).$$

Kvot regel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$. Produkt regel: $(fg)' = f'g + g'f$.

Med kedje regel har vi en ny tabell.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
u^n	$n u^n u'$	$\sin u$	$u' \cos u$	$\sin^{-1} u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
e^u	$u' e^u$	$\cos u$	$-u' \sin u$	$\cos^{-1} u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$\tan u$	$\frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$	$\tan^{-1} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$

Implicit derivering: Bestäm $\frac{dy}{dx}$:

$$\text{Derivera } \begin{cases} xy + \tan y = x \\ y + x \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} (1 + \tan^2 y) = 1 \end{cases}$$

Produkt regel
Kedje regel

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} (x + 1 + \tan^2 y) = 1 - y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{1+x+\tan^2 y} \neq 0.$$

Satser:

IVT:

f Kontinuerlig i $[a, b]$ } $\Rightarrow \exists c \in (a, b)$ så att $f(c) = 0$

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

↙ betyder att $f(a)$ och $f(b)$ har olika tecken

$$(f(a) > 0 \text{ och } f(b) < 0$$

$$\text{eller } f(a) < 0 \text{ och } f(b) > 0).$$

Rollessatsen:

f Kont. i $[a, b]$

deriverbar i (a, b)

$$f(a) = f(b)$$

} $\Rightarrow \exists c \in (a, b)$ så att

$$f'(c) = 0$$

MVT:

f Kont. i $[a, b]$

deriverbar i (a, b)

} $\Rightarrow \exists c \in (a, b)$ så att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Sats 1)

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in D_f \Rightarrow f(x) = \text{konstant} \quad \forall x \in D_f.$$

$$2) \quad f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in D_f \Rightarrow f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in D_f \\ \text{för } c \in \mathbb{R}.$$

ODE:

$$f'(t) = kf(t) \Rightarrow f(t) = f(0)e^{kt}.$$

Tangentlinjen till $f(x)$ i $x = a$:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Linjär approximation : $L(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$

$$(L(x) \approx f(x) \text{ nära } a).$$

* f Kontinuerlig på ett slutat intervall $\Rightarrow f$ har en global max och global min.

* Kritiska punkter av f : $f'(x) = 0$ eller $f'(x)$ existerar inte.

* $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ växande

$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ avtagande.

* $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ konvex

$f''(x) < 0 \Rightarrow f$ konkav.

$f''(x) = 0$ och f ändras från konvex till konkav
eller konkav till konvex

$\Rightarrow c$ inflektionspunkt.

f deriverbar:

* x_0 lokal max $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) < 0$

lokal min $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) > 0$.