

Faktorförsök

LMA201/LMA522

Helga Kristín Ólafsdóttir

2020-02-21

Baserat på slides efter Anders Hildeman

- Reducerade försöksplaner
- Generatorer
- Definierande relationer
- Ord
- Upplösning
- Genomgång: Helikopterlabben
- Exempel: Reducerat faktorförsök
- Uppgift 6 på tenta 20190115
- Exempel: Normalfördelningsdiagram
- Uppgift 6 på tenta 20180313

Reducerade försöksplaner

- Varje mätning kommer med en kostnad.
I många fall är den kostnaden så dyr att man vill minimera antalet mätningar man behöver genomföra.
- Vi har sett att ifall vi vill analysera påverkan av K faktorer så behöver vi göra minst 2^K antal mätningar.
- Detta blir ett ganska stort antal mätningar om vi egentligen bara tror att huvudeffekter och lägre ordningens samspelseffekter existerar.
- Kan man komma undan med att göra ett mindre antal mätningar?

- Det finns ett sätt: “**reducerad försöksplan**”.
- Att använda en reducerad försöksplan kan alltså minska kostnader men man tvingas offra någonting också.
Vissa skattade effekter kommer nu att blandas ihop så att den skattade effekten egentligen blir summan av flera olika effekter. Det går alltså inte att särskilja vissa effekter från varandra.

Exempel: Reducering av försöksplan

Säg att vi vill minska antal mätningar i ett 2^3 försök (alltså ett försök med 3 faktorer).

Grupp nr	A	B	C	AB	BC	AC	ABC
1	-	-	-	+	+	+	-
2	+	-	-	-	+	-	+
3	-	+	-	-	-	+	+
4	+	+	-	+	-	-	-
5	-	-	+	+	-	-	+
6	+	-	+	-	-	+	-
7	-	+	+	-	+	-	-
8	+	+	+	+	+	+	+

Välj en effekt som vi skall "offra". En effekt som vi alltså inte kommer ha möjlighet att skatta i vårt reducerade försök. Låt oss välja *ABC* då ett trefaktorsamspel oftast är mindre relevant än lägre ordningens effekter.

Exempel: Reducering av försöksplan

Skugga grupperna motsvarande då ABC är "hög" (eller "låg" om du hellre vill, spelar ingen roll).

Grupp nr	A	B	C	AB	BC	AC	ABC
1	-	-	-	+	+	+	-
2	+	-	-	-	+	-	+
3	-	+	-	-	-	+	+
4	+	+	-	+	-	-	-
5	-	-	+	+	-	-	+
6	+	-	+	-	-	+	-
7	-	+	+	-	+	-	-
8	+	+	+	+	+	+	+

Exempel: Reducering av försöksplan

“Klipp bort” de skuggade raderna.

Grupp nr	A	B	C	AB	BC	AC	ABC
1	-	-	-	+	+	+	-
4	+	+	-	+	-	-	-
6	+	-	+	-	-	+	-
7	-	+	+	-	+	-	-

Nu är det bara fyra mätgrupper kvar. Vi har alltså reducerat antal mätningar med hälften.

Exempel: Reducering av försöksplan

Ta bort *ABC*-kolumnen då vi nu inte kan skatta dess effekt ändå.
Numrera även om grupperna.

Grupp nr	A	B	C	AB	BC	AC
1	-	-	-	+	+	+
2	+	+	-	+	-	-
3	+	-	+	-	-	+
4	-	+	+	-	+	-

$$I_A = \frac{\bar{y}_2 + \bar{y}_3}{2} - \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_4}{2}$$

$$I_{BC} = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_4}{2} - \frac{\bar{y}_2 + \bar{y}_3}{2} = -I_A$$

Den skattade effekten av I_A och I_{BC} kommer alltså vara helt beroende av varandra oavsett vilket system vi faktiskt valt att studera och oavsett vilka faktorer vi valt att kalla A , B och C .

Exempel: Reducering av försöksplan

Grupp nr	A	B	C	AB	BC	AC
1	-	-	-	+	+	+
2	+	+	-	+	-	-
3	+	-	+	-	-	+
4	-	+	+	-	+	-

- Det som hänt är att vi inte längre har en representant av varje nivå på alla andra faktorer då A är hög respektive låg. Istället så visar det sig att BC alltid är hög då A är låg och tvärtom.
- Våra skattade effekter kommer alltså vara summan av flera effekter. När vi försöker räkna ut I_A räknar vi egentligen ut $I_A - I_{BC}$. Vi kan inte separera hur mycket av effekten som berodde på vilken av de två effekterna.

Reducerade försöksplaner

- Man säger att BC är ett **alias** till A (och tvärtom).
- Om vi som här valde att ta bort en effekt helt och alltså minska antalet mätningar till hälften så säger vi att vi har en 2^{3-1} -plan. Det är alltså egentligen en 2^3 plan fast vi har reducerat den med en nivå.
- Hade vi reducerat med två nivåer (och sålunda bara haft två mätningar återstående) så hade vi kallat det en 2^{3-2} plan.
- Varje plan som reduceras en nivå kommer innebära att man minskar antal grupper till hälften och att varje effekt får exakt ett alias.
- För en plan reducerad m får varje effekt exakt $2^m - 1$ alias.

Reducerade försöksplaner

- Vi såg hur vi kunde få en reducerad försöksplan genom att välja bort någon valfri effekt.
- Man kan se att planen vi fick av att ta bort de skuggade raderna motsvarade en 2^2 -plan med några extra kolumner och kolumner omkastade.
- Vi kan istället utgå från en $2^{(K-m)}$ -plan för att skapa en reducerad plan, 2^{K-m} -plan.

Skapande av en reducerad försöksplan

Vi kan börja med att konstruera en 2^2 -plan.

Grupp nr	A	B	AB
1	-	-	+
2	+	+	+
3	+	-	-
4	-	+	-

Genom att sätta ett bestämt alias för en effekt sätter man implicit alla alias för hela 2^{3-1} -planen.

T.ex. kan vi bestämma att effekt C skall beblandas med AB .

- Påståendet $C = AB$ kallar vi för en **generator** eftersom detta påstående kommer generera vår reducerade försöksplan. Uppenbarligen så är AB och C alias till varandra.
- Vi kan också se att om vi multiplicerar tecknen i A -kolumnen med tecknen i AB -kolumnen så får vi B -kolumnen. Men, AB kolumnen är ju identisk med C kolumnen. Alltså måste tvåfaktorsamspelet AC ha samma tecken som B ! AC och B är alltså alias till varandra!
- Detta resonemang går att generalisera.

- Ta generatoren och multiplicera både vänster och höger led med bokstäverna i vänster led. Alltså i vårt fall:

$$C \cdot C = C \cdot AB.$$

- Varje gång en och samma bokstav multipliceras med sig själv så tar den ut sig själv (tänk att varje rad-värde i C kolumnen multiplicerat med sig själv kommer bli $+1$).
- Detta leder till att

$$CC = CAB \Leftrightarrow M = CAB.$$

M är ju en kolumn med bara $+1$ för i varje rad. Det innebär att vilken kolumn som helst multiplicerat med M kommer bli sig själv.

Definerade relationer

- $M = CAB$ kallas vår 2^{3-1} -plans **definierande relation**. Hade vi valt en annan generator så hade vi fått en annan definierande relation.
- Bokstavskombinationerna till höger om likhetstecknet i den definierande relationen kallas för ett **ord**.
- Den definierande relationen motsvarar vilken effekt som sammanblandas med medelvärdet, M .
- Tricket är nu att vi kan ta fram alias till vilken effekt som helst genom att multiplicera effekten med ordet.
T.ex. visste vi ju redan att B och AC är alias till varandra. Vi ser nu även att $B \cdot CAB = CA = AC$.
Vi kan också nu ta reda på att $A = A \cdot M = A \cdot ABC = BC$. Alltså är A och BC alias.

Definerade relationer

- Då vi reducerar med mer än en nivå så kommer vi ha mer än en definierande relation.
- Dessa definierande relationer ger varsitt ord. Vi benämner dessa ord $l_1, l_2, \dots$
- De första definierande relationerna räknar man ut med hjälp av de olika generatorerna (vi måste ju definiera en generator för varje nivå vi reducerar).
- De återstående definierande relationerna får vi genom att multiplicera orden från de redan uträknade definierade relationerna med varandra i alla tänkbara kombinationer.

Definierade relationer

- Reducerar vi med två nivåer får vi alltså tre definierande relationer. Två från generatorerna och den sista genom att multiplicera ihop orden från de andra två.
Alltså, orden l_1 och l_2 definierade via generatorerna. Det sista ordet blir då $l_3 = l_1 \cdot l_2$.
- Reducerar man med m nivåer ger det då $\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} = 2^m - 1$ olika definierande relationer och således $2^m - 1$ alias till varje effekt.

Exempel: Skapande av en reducerad försöksplan

- Antag att vi vill se hur 5 faktorer påverkar vår storhet, y .
- Vi har inte resurserna att utföra alla 32 mätningar som skulle behövas för ett fullständigt 2^5 -plan.
Istället så reducerar vi med 2 nivåer så att vi bara behöver göra 8 mätningar.
- Vi får alltså en 2^{5-2} -plan.

Exempel: Skapande av en reducerad försöksplan

Börja som om det var en vanlig 2^3 -plan.

Grupp nr	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
1	-	-	-	+	+	+	-
2	+	-	-	-	-	+	+
3	-	+	-	-	+	-	+
4	+	+	-	+	-	-	-
5	-	-	+	+	-	-	+
6	+	-	+	-	+	-	-
7	-	+	+	-	-	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+

- Vi väljer nu våra två generatorer, en för varje nivå som vi reducerar.
Låt oss välja

$$AB = D$$

$$AC = E$$

Exempel: Skapande av en reducerad försöksplan

Vår plan blir nu:

Grupp nr	A	B	C	D	E	BC	ABC
1	-	-	-	+	+	+	-
2	+	-	-	-	-	+	+
3	-	+	-	-	+	-	+
4	+	+	-	+	-	-	-
5	-	-	+	+	-	-	+
6	+	-	+	-	+	-	-
7	-	+	+	-	-	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+

- Vad blir de definierande relationerna?

Exempel: Skapande av en reducerad försöksplan

Vår plan blir nu:

Grupp nr	A	B	C	D	E	BC	ABC
1	-	-	-	+	+	+	-
2	+	-	-	-	-	+	+
3	-	+	-	-	+	-	+
4	+	+	-	+	-	-	-
5	-	-	+	+	-	-	+
6	+	-	+	-	+	-	-
7	-	+	+	-	-	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+

- Vi får de definierande relationerna

$$I_1 = DAB = ABD$$

$$I_2 = EAC = ACE$$

$$I_3 = ABD \cdot ACE = BCED$$

Exempel: Skapande av en reducerad försöksplan

$$I_1 = ABD, I_2 = ACE, I_3 = BCDE$$

- Vilka alias har vi?

Exempel: Skapande av en reducerad försöksplan

$$I_1 = ABD, I_2 = ACE, I_3 = BCDE$$

- Vi får alias:

Faktor	I_1	I_2	I_3
$M:$	ABD	ACE	$BCDE$
$A:$	BD	CE	$ABCDE$
$B:$	AD	$ABCE$	CDE
$C:$	$ABCD$	AE	BDE
$D:$	AB	$ACDE$	BCE
$E:$	$ABDE$	AC	BCD
$BC:$	ACD	ABE	DE
$ABC:$	CD	BE	ADE

Kom ihåg!

- Kom ihåg att kolumnerna för alla huvudeffekter bör vara utskrivna i tabellen för den reducerade försöksplanen.
Detta är nödvändigt för att man när man väl utför experimenten skall se hur man skall ställa in faktornivåerna i respektive mätgrupp.
- Vi ser att alla effekter vi försöker skatta kommer att blandas ihop med $2^m - 1$ andra effekter (där m är antal reducerade nivåer). Även medelvärdet!
- Sammanblandningen kan leda till att vi tror att effekter inte existerar om de sammanblandade effekterna tar ut varandra även om de var och en är stora.

- Oftast är effekter av högre ordningen (trefaktorsamspel eller högre) inte så starka. Det är inte ovanligt att man antar att dessa inte existerar eller är så små att man inte bryr sig om dem.
- Man skulle därför vilja att huvudeffekter, och helst även tvåfaktorsamspel, inte hade alias som också var huvudeffekter eller tvåfaktorsamspel.
- Om vi tittar på våra alias i exemplet ovan ser vi att ingen huvudeffekt har en annan huvudeffekt som alias. Dock har de alla ett tvåfaktorsamspel. Vi ser också att medelvärdet inte har någon huvudeffekt eller tvåfaktorsamspel som alias.

Upplösning

- Ordningen aliasens samspelseffekter är relaterade till orden i de definierande relationerna.
- Har vi ord som alla är större än 3 bokstäver så kan omöjligt en huvudeffekt få ett alias av mindre ordning än 3-faktorsamspel (eftersom en bokstav max kan dra bort en bokstav från orden).
- Vi ser alltså att det finns en fördel med att ha långa ord i våra definierande relationer!
- En kedja är ju aldrig starkare än sin svagaste länk och därför får man titta på det ord som är kortast för att se hur bra sammanblandningsmönster vi kan få. Antal bokstäver i det kortaste ordet kallas den reducerade försöksplanens **upplösning**.
- I exemplet ovan var upplösningen 3 då både I_1 och I_2 hade ord som var 3 bokstäver långa.

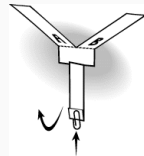
- Vi har alltså en 2_{III}^{5-2} -plan. (Man skriver upplösningen med romerska bokstäver som index till 2:an)
- Hade vi kunnat få en bättre plan?

- Vi har alltså en 2_{III}^{5-2} -plan. (Man skriver upplösningen med romerska bokstäver som index till 2:an)
- Hade vi kunnat få en bättre plan?
Nej, det finns bara ett 3-faktor samspel i en 2^3 -plan. Om de första orden båda skall vara 4 bokstäver långa så måste man sätta båda generatorerna till trefaktorsamspelet, detta leder till att tredje ordet blir M .
- Upplösning III är alltså det bästa vi kan åstadkomma för en 2^{5-2} -plan.

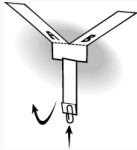
- En fullständig försöksplan kan kräva många mätningar och därför bli dyr.
- En reducerad försöksplan kan göras istället men har vissa nackdelar. I en reducerad försöksplan får skattade effekter alias med vilka de delar skattningen. Detta kan vara problematiskt om man har alias som har en stor effekt och “blandar sig i” den uppskattade effekten.
- Högre upplösning gör att lägre ordningens samspelseffekter inte blandar sig med varandra.
- Man kan använda reducerade försöksplaner för en preliminär analys som sedan skall ge en svar på om det är värt att fortsätta med en mer grundlig fullständig analys.

Helikopterlabben

- Ni tar rollen av att vara konsulter åt ett företag som tillverkar pappershelikoptrar.
- Företaget har identifierat 5 olika faktorer som de tror har påverkan på flygdugligheten.
- Företaget vill nu att ni skall undersöka hur dessa 5 faktorer påverkar tiden som helikoptern kan stanna i luften.
- Deras förhoppning är att ni skall kunna ge dem förslag på hur de skall ställa om sin produktion så att helikoptern i genomsnitt stannar längre i luften.



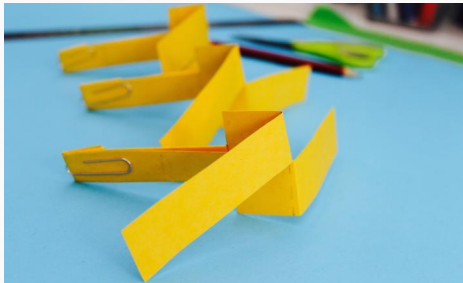
Helikopterlabben



- 5 faktorer är som sagt givna i uppgiften (tejpade , bredd, längd, vinglängd, gemtyngd).
- Ni får byta ut faktorer mot egna faktorer om ni har några egna idéer av vad som skulle kunna påverka flygförmågan.
- En provplan för ett reducerat faktorförsök är given i uppgiften (2^{5-1}). Använd er av den.
- Instruktioner på hur ni skapar helikoptrarna är inkluderade i uppgiftens pdf-fil.
- Ni får bara utföra 16 mätningar och därför kan inte variansen skattas med metod I från föreläsningarna. Istället måste ni använda er av ett normalfördelningspapper (finns inkluderat i uppgiftens pdf) för att undersöka vilka effekter som verkar vara signifikanta.

Helikopterlabben

- Den reducerade försöksplanen är som sagt redan bestämd. Studera den och hitta generatorer, definierande relationer och sammanblandningsmönster för huvudeffekterna.
- När ni gör mätningarna, tänk på vad som kan vara källor till systematiska fel. Beskriv dessa samt hur ni gör för att försöka undvika dessa felen.



- Resultatet av er undersökning skall bli en labbrapport.
- Skriv rapporten så att man kan förstå den utan att ha läst uppgiften.
- Beskriv utförandet, analysen och resultaten.
- Rapporten skall inkludera den reducerade försöksplanen med ifyllda uppmätta värden.
- Rapporten skall inkludera det ifyllda normalfördelningspappret.
- **Rapporten skall skickas in via Canvas i pdf-format.**

- Gå med i någon av de grupperna som finns på Canvas. Det går max att vara 4 personer i varje grupp.
- Rapporten skall laddas upp via Canvas senast 8:e Mars 2020.
- Inlämning består i en bifogad pdf-fil.
- Pdf-filerna kommer läsas och jämföras både av ett automatiskt program och av rättaren. Kom därför ihåg att inga grupper får skriva av varandra eller använda sig av gemensamma mätningar då detta räknas som fusk.

Lycka till!

Exempel: Reducerat faktorförsök

- Vi vill se hur tiden det tar att simma mellan Lindholmen och Slottsberget påverkas av följande faktorer
 1. A: Simmar bröstsim (-), Crawler (+).
 2. B: Man målar små djupblå fiskfjäll med vattenfast tuchpenna över hela kroppen (+), eller man låter bli (-).
 3. C: Simma med bara fötter (-), Ha på sig en simfena på högra foten (+).
- Då vattnet så här års kan vara lite ... friskt, så kommer vi inte kunna göra mer än 4 försök innan vi måste ge upp och gå in och värma oss.
- Konstruera en bra försöksplan för att ta reda på hur man minimerar simtiden.

Exempel: Reducerat faktorförsök

- Uppenbarligen måste vi välja en reducerad försöksplan (2^{3-1}).

Grupp nr	A	B	AB
1	-	-	+
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	+

- Vi har starka skäl att tro att fiskfjällsidén inte kommer ha någon egentlig effekt. Därför är det nog bra om B har ett alias som vi faktiskt tror har en effekt. Både faktor A, C och AC kan förmodlingen ha en reell effekt. Därför vill vi inte att dessa skall sammanblandas med varandra.

Exempel: Reducerat faktorförsök

Grupp nr	A	B	AB
1	-	-	+
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	+

- Låt oss därför sätta generatorn

Exempel: Reducerat faktorförsök

Grupp nr	A	B	AB
1	-	-	+
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	+

- Låt oss därför sätta generatorn $B = C$.
- Detta ger den definierande relationen:

Exempel: Reducerat faktorför sök

Grupp nr	A	B	AB
1	-	-	+
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	+

- Låt oss därför sätta generatorn $B = C$.
- Detta ger den definierande relationen: $M = BC$.
- Sammanblandningsmönstret blir då:

Exempel: Reducerat faktorförsök

Grupp nr	A	B	AB
1	-	-	+
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	+

- Låt oss därför sätta generatoren $B = C$.
- Detta ger den definierande relationen: $M = BC$.
- Sammanblandningsmönstret blir då:

M	BC
A	ABC
B	C
AB	AC

- Detta är ett bra sammanblandningsmönster då alla effekter som inkluderar B bör vara fullständigt verkningslösa.
- Vi ser att vi har en 2_{III}^{3-1} -plan då ordet BC har två bokstäver.

Exempel: Reducerat faktorförsök

Hade vi istället valt den kanske lite vanligare generatoren $C = AB$ så hade vi fått sammanblandningsmönstret:

M	ABC
A	BC
B	AC
C	AB

Detta hade gett en 2_{III}^{3-1} -plan istället. Eftersom ingen effekt som innehåller B tros existera så blir det även här ingen sammanblandning. Alltså, i det här speciella fallet så är dessa två planer lika bra trots att de har olika upplösning.

Exempel: Reducerat faktorförsök

Det skall dock poängteras att om vi valt generatoren $C = A$ så bebländar sig uppenbarligen effekter för C och A vilket leder till en dålig provtagningsplan även om B är totalt verkningslös.

M	AC
A	C
B	ABC
BC	AB

Man kan alltså inte välja generatoren helt godtyckligt även om en av faktorerna är verkningslös.

Exempel: Reducerat faktorförsök

Tillbaka till valet av generator $C = B$:

Efter mätningar så har man fått följande tabell:

Grupp nr	A	B	AB	C	AC	Resultat
1	-	-	+	-	+	9.61
2	+	-	-	-	-	10.39
3	-	+	-	+	-	12.66
4	+	+	+	+	+	5.78

Exempel: Reducerat faktorförsök

Tillbaka till valet av generator $C = B$:

Efter mätningar så har man fått följande tabell:

Grupp nr	A	B	AB	C	AC	Resultat
1	-	-	+	-	+	9.61
2	+	-	-	-	-	10.39
3	-	+	-	+	-	12.66
4	+	+	+	+	+	5.78

$$M + I_{BC} = \frac{9.61 + 10.39 + 12.66 + 5.78}{4} = 9.61$$

$$I_A + I_{ABC} = \frac{10.39 + 5.78}{2} - \frac{9.61 + 12.66}{2} = -3.05$$

$$I_B + I_C = \frac{12.66 + 5.78}{2} - \frac{9.61 + 10.39}{2} = -0.78$$

$$I_{AB} + I_{AC} = \frac{9.61 + 5.78}{2} - \frac{10.39 + 12.66}{2} = -3.83$$

Exempel: Reducerat faktorförsök

- Om vi tror att faktor B inte påverkar någonting så har vi nu skattat att huvudeffekten av att lära sig crawla är -3.05 minuter. Det är alltså generellt bättre att crawla.
- Huvudeffekten för att lägga till en simfena enbart på högra foten är -0.78 . Det ser alltså fördelaktigt ut att använda en simfena.
- Samspelseffekten av att crawla och ha en simfena är -3.83 . Det verkar alltså bäst att både crawla och ha en simfena.

Exempel: Reducerat faktorförsök

- Barfota bröstsim ger exakt medelvärdet 9.61.
- Crawl och inte ha en simfena ger sämre värde än medelvärdet.
- Allra värst är att simma bröstsim med en simfena.
- Vi vet dock inte helt säkert att de målade fiskfjällen inte har någon effekt!
Om de gör det så har vi även inkluderat dessa effekter i vår slutsats.
- Om fiskfjällseffekten är tillräckligt stor så kan vi få olika slutsatser beroende på hur vi väljer vår generator då olika effekter blandar sig med varandra.

Problem: Tenta 2018-01-09 uppgift 5

Fullständigt faktorförsök:

Nr.	A	B	C	D	$\bar{y}$
1	-	-	-	-	42
2	+	-	-	-	54
3	-	+	-	-	43
4	+	+	-	-	52
5	-	-	+	-	41
6	+	-	+	-	56
7	-	+	+	-	44
8	+	+	+	-	55
9	-	-	-	+	41
10	+	-	-	+	53
11	-	+	-	+	44
12	+	+	-	+	51
13	-	-	+	+	43
14	+	-	+	+	57
15	-	+	+	+	48
16	+	+	+	+	59

a)

Beräkna samspelseffekten I_{AB} .

Problem: Tenta 2018-01-09 uppgift 5

Fullständigt faktorförsök:

Nr.	A	B	C	D	AB	$\bar{y}_i$
1	-	-	-	-	+	42
2	+	-	-	-	-	54
3	-	+	-	-	-	43
4	+	+	-	-	+	52
5	-	-	+	-	+	41
6	+	-	+	-	-	56
7	-	+	+	-	-	44
8	+	+	+	-	+	55
9	-	-	-	+	+	41
10	+	-	-	+	-	53
11	-	+	-	+	-	44
12	+	+	-	+	+	51
13	-	-	+	+	+	43
14	+	-	+	+	-	57
15	-	+	+	+	-	48
16	+	+	+	+	+	59

Problem: Tenta 2018-01-09 uppgift 5

$$I_{AB} = \frac{42 - 54 - 43 + 52 + 41 - 56 - 44 + 55 + 41 - 53}{8} \\ + \frac{-44 + 51 + 43 - 57 - 48 + 59}{8} = -\frac{15}{8} = -1.875$$

Problem: Tenta 2018-01-09 uppgift 5

$$I_{AB} = \frac{42 - 54 - 43 + 52 + 41 - 56 - 44 + 55 + 41 - 53}{8} + \frac{-44 + 51 + 43 - 57 - 48 + 59}{8} = -\frac{15}{8} = -1.875$$

b)

Beräkna ett 99% referensintervall om standardavvikelsen för respektive $\bar{y}_i$ är $\sigma = 2$. Avgör om effekten AB är signifikant.

Problem: Tenta 2018-01-09 uppgift 5

$$I_{AB} = \frac{42 - 54 - 43 + 52 + 41 - 56 - 44 + 55 + 41 - 53}{8} + \frac{-44 + 51 + 43 - 57 - 48 + 59}{8} = -\frac{15}{8} = -1.875$$

b)

Beräkna ett 99% referensintervall om standardavvikelsen för respektive $\bar{y}_i$ är $\sigma = 2$. Avgör om effekten AB är signifikant.

Vi får referensintervallet

$$\pm Z_{0.01/2} \frac{2\sigma}{\sqrt{16}} \approx 2.575$$

Alltså är I_{AB} inte signifikant då $1.875 < 2.575$.

Problem: Tenta 2018-01-09 uppgift 5

c)

Antag att man också är intresserad av faktorerna E , F och G . Man gör ett reducerat faktorförsök med 16 grupper där A , B , C och D är som ovan. Generatorerna är $E = ABCD$, $F = ABC$ och $G = BCD$.

Beräkna alla ord och bestäm upplösningen. Förklara även varför det är ett dåligt val av generatorer om man inte vill att E skall beblandas med något tvåfaktorsamspel.

Problem: Tenta 2018-01-09 uppgift 5

c)

Antag att man också är intresserad av faktorerna E , F och G . Man gör ett reducerat faktorförsök med 16 grupper där A , B , C och D är som ovan. Generatorerna är $E = ABCD$, $F = ABC$ och $G = BCD$.

Beräkna alla ord och bestäm upplösningen. Förklara även varför det är ett dåligt val av generatorer om man inte vill att E skall beblandas med något tvåfaktorsamspel.

$$I_1 = ABCDE,$$

$$I_2 = ABCF, I_3 = BCDG$$

$$I_4 = I_1 \cdot I_2 = DEF,$$

$$I_5 = I_1 \cdot I_3 = AEG, I_6 = I_2 \cdot I_3 = ADFG$$

$$I_7 = I_1 \cdot I_2 \cdot I_3 = BCEFG$$

Upplösning III eftersom I_4 bara har 3 bokstäver.

Problem: Tenta 2018-01-09 uppgift 5

Ord I_4 och I_5 leder till att E sammanblandas med DF och AG vilket inte var bra!

Vi kan undvika att E sammanblandas med tvåfaktorsamspel genom att välja generatorerna $E = ABC$, $F = BCD$ och $G = ACD$. Då får vi orden:

$$I_1 = ABCE,$$

$$I_2 = BCDF, I_3 = ACDG$$

$$I_4 = I_1 \cdot I_2 = ADF, \quad I_5 = I_1 \cdot I_3 = BDEG, I_6 = I_2 \cdot I_3 = ABFG$$

$$I_7 = I_1 \cdot I_2 \cdot I_3 = CFG$$

Detta är också en 2_{III}^{7-3} -plan.

d)

Antag att man gör ett fullständigt faktorförsök med 8 faktorer. Hur många 3-faktorsamspel finns det?

d)

Antag att man gör ett fullständigt faktorförsök med 8 faktorer. Hur många 3-faktorsamspel finns det?

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = \frac{336}{6} = 56$$

Det finns 56 olika 3-faktorsamspel.

Skapa en IV -plan

I c)-uppgiften skulle vi ha kunnat skapa en 2_{IV}^{7-3} -plan.

- Vi vet att

$$l_7 = l_1 \cdot (l_2 \cdot l_3) = l_1 \cdot l_6,$$

$$l_7 = l_2 \cdot (l_2 \cdot l_3) = l_2 \cdot l_5,$$

$$l_7 = l_3 \cdot (l_2 \cdot l_3) = l_3 \cdot l_4.$$

- Alla bokstäver i l_7 måste existera i antingen en eller alla tre av orden l_1, l_2, l_3 .
- Vi vet att l_1, l_2 och l_3 är skapade direkt från de tre generatorerna. Det betyder att de tillsatta faktorernas bokstäver bara får finnas en för varje ord (l_1, l_2, l_3). Alltså måste l_7 innehålla alla dessa tre bokstäver då de inte kan "tas ut" från l_7 pga att de finns i två av de tre orden.
- Då vi vill ha en IV -plan så behöver l_7 innehålla minst en till bokstav utöver de nödvändiga (E, F, G). Låt oss välja den till D . Alltså $l_7 = DEFG$.

Skapa en I/V -plan

- Bokstäverna i l_7 måste existera i antingen en eller alla tre av orden l_1, l_2, l_3 samtidigt som dessa ord måste vara minst 4 bokstäver långa.
- Vi ser också att $l_4 = l_3 \cdot l_7$, $l_5 = l_2 \cdot l_7$ och $l_6 = l_1 \cdot l_7$. Orden l_4, l_5 och l_6 måste också vara minst 4 bokstäver långa.
Alltså måste orden l_1, l_2, l_3 var och en för sig ha två bokstäver som inte finns i l_7 .
- Orden l_4, l_5 och l_6 måste dessutom ha bokstäver som "tas ut" av motsvarande ord l_3, l_2, l_1 . Så att dessa extra bokstäver inte hamnar i l_7 .
- Vi kan då välja att definiera de första orden som t.ex.

$$l_1 = ABDE \Rightarrow l_6 = ABFG,$$

$$l_2 = ACDF \Rightarrow l_5 = ACEG,$$

$$l_3 = BCDG \Rightarrow l_4 = BCEF.$$

Skapa en $/V$ -plan

- Generatorerna får vid från de första tre orden tillsammans med kunskapen att E , F , och G måste vara ditlagda efteråt. Alltså

$$E = ABD$$

$$F = ACD$$

$$G = BCD$$

- Nu har vi en plan med upplösning IV!!
- Orden är:

$$I_1 = ABDE, I_2 = ACDF, I_3 = BCDG,$$

$$I_4 = BCEF, I_5 = ACEG, I_6 = ABFG, I_7 = DEFG.$$

Familjen Yrsel åkte på gemensam cykelsemester förra sommaren.

Semestern varade i 32 dagar och varje dag innebar en cykelsträcka på 3 mil (vi kan tänka oss att varje sträcka var likvärdig i svårighetsgrad).

Vi kan tänka oss att tiden en sträcka cyklades är en responsvariabel (y). Responsvariabeln kan påverkas av tre olika faktorer (ålder, kön och om det regnar eller inte). Då familjen består av jämnåriga föräldrar och deras två barn som är tvillingsyskon (en flicka och en pojke) samt att det regnade 16 av dagarna som familjen cyklade så kan man undersöka responsvariabeln med hjälp av ett 2^3 försök där det existerar 4 replikat för varje provgrupp.

Faktorer	A: Ålder	B: Kön	C: Regn
Låg (-)	12	Man	Torrt
Hög (+)	42	Kvinna	Blött

Nr.	A	B	C	$\bar{y}_i$	s_i
1	-	-	-	164.9	4.3
2	+	-	-	43.0	3.9
3	-	+	-	159.1	4.8
4	+	+	-	38.5	5.1
5	-	-	+	224.7	7.0
6	+	-	+	179.0	4.9
7	-	+	+	222.2	7.7
8	+	+	+	183.0	10.5

Tabell 1: Faktorer samt försöksplan för tiden det tar att cykla en sträcka om 3 mil.

a)

Beräkna I_A och I_{AB} .

a)

Beräkna I_A och I_{AB} .

$$I_A = \frac{-164.9 + 43 - 159.1 + 38.5 - 224.7 + 179 - 222.2 + 183}{4}$$

$$= -81.85$$

$$I_{AB} = \frac{164.9 - 43 - 159.1 + 38.5 + 224.7 - 179 - 222.2 + 183}{4}$$

$$= 1.98$$

b)

Beräkna ett 95%-igt referensintervall och avgör vilka skattade effekter som är signifikanta.

b)

Beräkna ett 95%-igt referensintervall och avgör vilka skattade effekter som är signifikanta.

Först beräknar vi den gemensamma skattningen av variansen såsom

$$s_p^2 = \frac{3s_1^2 + 3s_2^2 + \dots}{3 * 8} = 40.65.$$

Eftersom effekten har variansen $\sigma_{\text{effekt}}^2 = 4 \frac{\sigma^2}{Nn} = 4 \frac{\sigma^2}{8 \cdot 4}$ så blir skattningen av effekternas varians

$$s_{\text{effekt}}^2 = \frac{40.65}{8} = 5.01.$$

Alltså får effekten den skattade standardavvikelsen $s_{\text{effekt}} = 2.24$.

Det tvåsidiga 95%-iga referensintervallet fås genom att multiplicera standardavvikelsen för effekten med 97.5% kvantilen för t-fördelningen med frihetsgraden $8(4 - 1) = 24$. Alltså blir referensintervallet

$$0 \pm t_{0.025}(df = 24) \cdot s_{\text{effekt}} = 0 \pm 2.06 \cdot 2.24 = 0 \pm 4.62.$$

c)

Vilka av de skattade effekterna är signifikanta?

c)

Vilka av de skattade effekterna är signifikanta?

I_A är signifikant eftersom den var skattad till $-81.85 < -4.62$. I_{AB} är inte signifikant eftersom $-4.62 < 1.98 < 4.62$

Under familjen Yrsels cykelsemester så cyklade far och dotter på racingcyklar och mor och son på mountainbikes.

Detta kan ha spelat in i hur snabbt de cyklade. Man kan alltså räkna in en fjärde faktor, D som motsvarar cykeltyp där låg (-) skulle motsvara racingcykel och (+) mountainbike.

Försöksplanen är alltså egentligen en reducerad försöksplan, 2^{4-1} -plan.

d)

Bestäm generator, ord och upplösning för denna reducerade försöksplan.

d)

Bestäm generator, ord och upplösning för denna reducerade försöksplan.

Då en person är antingen gammal och kvinna eller ung och man så kommer de cykla på mountainbikes, annars inte. Det betyder alltså att D 's kolumn motsvarar tvåfaktorsamspelet AB då AB har positivt värde då A och B är båda låga eller A och B är båda höga.

Man har alltså generatoren $D = AB$. Detta ger den definierande relationen $I = ABD$. Ordet är alltså ABD som har upplösning III . Vi har alltså en 2_{III}^{4-1} -plan.

Exempel: normalfördelningsdiagram

Antag att vi från ett faktorförsök har skattat 21 effekter. De skattade effekterna hade värdena:

-8.6	-8.9	-9.6	8.3	-42.0	-23.7	36.0
39.0	-22.2	25.27	5.9	10.97	-17.3	-4.2
-10.5	-32.4	16.6	15.6	-2.2	-1.6	-6.3

Uppgift

Avgör vilka effekter som är signifikanta.

Exempel: normalfördelningsdiagram

- i) Sortera de skattade effekterna från lägsta till högsta, $\{x_i\}_{i=1}^{21}$ där $x_1 = -42$ är det lägsta värdet och $x_{21} = 39$ är det högsta.

i							
x_i	-8.6	-8.9	-9.6	8.3	-42.0	-23.7	36.0
p_i							

i							
x_i	39.0	-22.2	25.27	5.9	10.97	-17.3	-4.2
p_i							

i							
x_i	-10.5	-32.4	16.6	15.6	-2.2	-1.6	-6.3
p_i							

Exempel: normalfördelningsdiagram

- i) Sortera de skattade effekterna från lägsta till högsta, $\{x_i\}_{i=1}^{21}$ där $x_1 = -42$ är det lägsta värdet och $x_{21} = 39$ är det högsta.

i					1		
x_i	-8.6	-8.9	-9.6	8.3	-42.0	-23.7	36.0
p_i							
i							
x_i	39.0	-22.2	25.27	5.9	10.97	-17.3	-4.2
p_i							
i							
x_i	-10.5	-32.4	16.6	15.6	-2.2	-1.6	-6.3
p_i							

Exempel: normalfördelningsdiagram

- i) Sortera de skattade effekterna från lägsta till högsta, $\{x_i\}_{i=1}^{21}$ där $x_1 = -42$ är det lägsta värdet och $x_{21} = 39$ är det högsta.

i					1		
x_i	-8.6	-8.9	-9.6	8.3	-42.0	-23.7	36.0
p_i							
i							
x_i	39.0	-22.2	25.27	5.9	10.97	-17.3	-4.2
p_i							
i		2					
x_i	-10.5	-32.4	16.6	15.6	-2.2	-1.6	-6.3
p_i							

Exempel: normalfördelningsdiagram

- i) Sortera de skattade effekterna från lägsta till högsta, $\{x_i\}_{i=1}^{21}$ där $x_1 = -42$ är det lägsta värdet och $x_{21} = 39$ är det högsta.
- ii) Rita ut punkterna (x_i, p_i) i normalfördelningsdiagrammet, där

$$p_i = \frac{i - 0.5}{21}$$

i	9	8	7	15	1	3	20
x_i	-8.6	-8.9	-9.6	8.3	-42.0	-23.7	36.0
p_i							
i	21	4	19	14	16	5	11
x_i	39.0	-22.2	25.27	5.9	10.97	-17.3	-4.2
p_i							
i	6	2	18	17	12	13	10
x_i	-10.5	-32.4	16.6	15.6	-2.2	-1.6	-6.3
p_i							

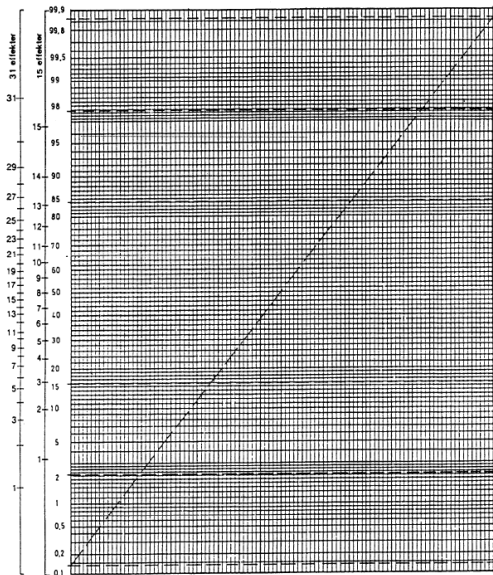
Exempel: normalfördelningsdiagram

- i) Sortera de skattade effekterna från lägsta till högsta, $\{x_i\}_{i=1}^{21}$ där $x_1 = -42$ är det lägsta värdet och $x_{21} = 39$ är det högsta.
- ii) Rita ut punkterna (x_i, p_i) i normalfördelningsdiagrammet, där

$$p_i = \frac{i - 0.5}{21}$$

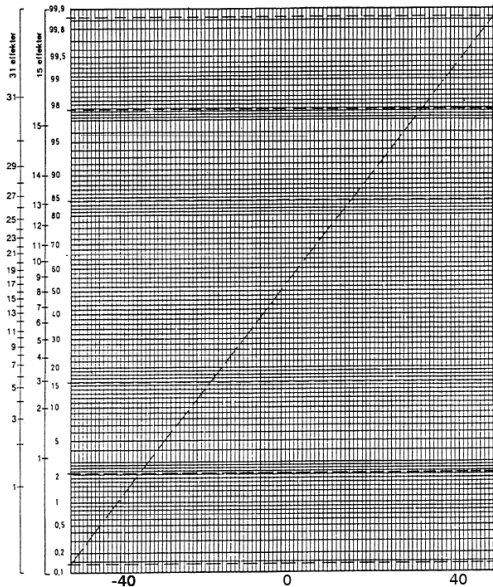
i	9	8	7	15	1	3	20
x_i	-8.6	-8.9	-9.6	8.3	-42.0	-23.7	36.0
p_i	40.5%	35.7%	31.0%	69.0%	2.38%	11.9%	92.9%
i	21	4	19	14	16	5	11
x_i	39.0	-22.2	25.27	5.9	10.97	-17.3	-4.2
p_i	97.6%	16.7%	88.1%	64.3%	73.8%	21.4%	50.0%
i	6	2	18	17	12	13	10
x_i	-10.5	-32.4	16.6	15.6	-2.2	-1.6	-6.3
p_i	26.2%	7.2%	83.3%	78.6%	54.8%	59.5	45.2%

Exempel: normalfördelningsdiagram



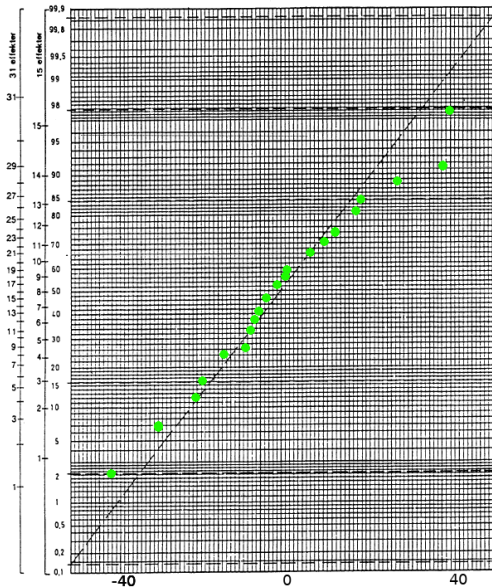
x_j	p_j
-8.6	40.5%
-8.9	35.7%
-9.6	31.0%
8.3	69.0%
-42.0	2.38%
-23.7	11.9%
36.0	92.9%
39.0	97.6%
-22.2	16.7%
25.27	88.1%
5.9	64.3%
10.97	73.8%
-17.3	21.4%
-4.2	50.0%
-10.5	26.2%
-32.4	7.2%
16.6	83.3%
15.6	78.6%
-2.2	54.8%
-1.6	59.5
-6.3	45.2%

Exempel: normalfördelningsdiagram



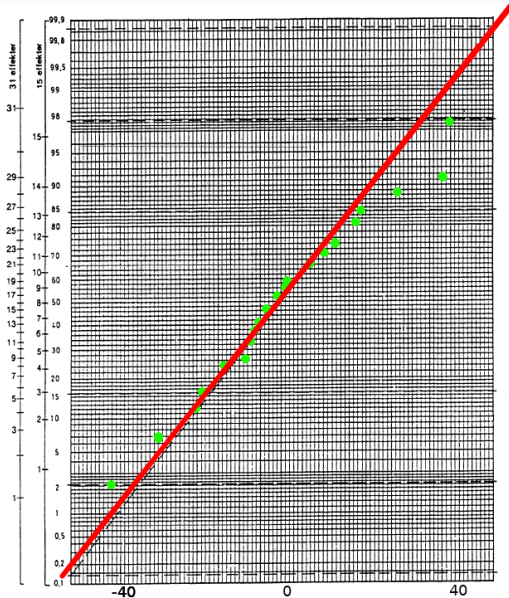
x_j	p_j
-8.6	40.5%
-8.9	35.7%
-9.6	31.0%
8.3	69.0%
-42.0	2.38%
-23.7	11.9%
36.0	92.9%
39.0	97.6%
-22.2	16.7%
25.27	88.1%
5.9	64.3%
10.97	73.8%
-17.3	21.4%
-4.2	50.0%
-10.5	26.2%
-32.4	7.2%
16.6	83.3%
15.6	78.6%
-2.2	54.8%
-1.6	59.5
-6.3	45.2%

Exempel: normalfördelningsdiagram



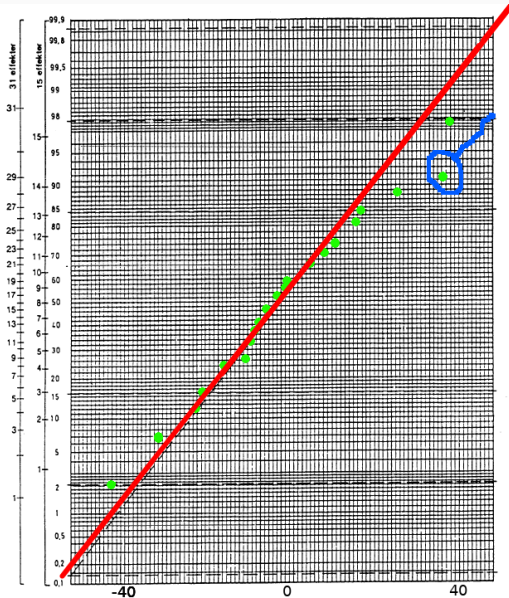
x_j	p_j
-8.6	40.5%
-8.9	35.7%
-9.6	31.0%
8.3	69.0%
-42.0	2.38%
-23.7	11.9%
36.0	92.9%
39.0	97.6%
-22.2	16.7%
25.27	88.1%
5.9	64.3%
10.97	73.8%
-17.3	21.4%
-4.2	50.0%
-10.5	26.2%
-32.4	7.2%
16.6	83.3%
15.6	78.6%
-2.2	54.8%
-1.6	59.5
-6.3	45.2%

Exempel: normalfördelningsdiagram



x_j	p_j
-8.6	40.5%
-8.9	35.7%
-9.6	31.0%
8.3	69.0%
-42.0	2.38%
-23.7	11.9%
36.0	92.9%
39.0	97.6%
-22.2	16.7%
25.27	88.1%
5.9	64.3%
10.97	73.8%
-17.3	21.4%
-4.2	50.0%
-10.5	26.2%
-32.4	7.2%
16.6	83.3%
15.6	78.6%
-2.2	54.8%
-1.6	59.5
-6.3	45.2%

Exempel: normalfördelningsdiagram



x_i	p_i
-8.6	40.5%
-8.9	35.7%
-9.6	31.0%
8.3	69.0%
-42.0	2.38%
-23.7	11.9%
36.0	92.9%
39.0	97.6%
-22.2	16.7%
25.27	88.1%
5.9	64.3%
10.97	73.8%
-17.3	21.4%
-4.2	50.0%
-10.5	26.2%
-32.4	7.2%
16.6	83.3%
15.6	78.6%
-2.2	54.8%
-1.6	59.5
-6.3	45.2%

Exempel: normalfördelningsdiagram

Uppgift

Avgör vilka effekter som är signifikanta.

Vi ansåg att iallafall värdet 36.0 var signifikant. Eftersom 39 är större än 36, 36 är signifikant och 36 är större än noll så måste vi även anse att 39 är signifikant.

Inget värde mindre än noll såg ut att sticka ut så mycket från linjen att vi ansåg det signifikant.

Exempel: normalfördelningsdiagram

Uppgift

Avgör vilka effekter som är signifikanta.

Från normalfördelningsdiagrammet ser vi att de två största effekterna är signifikanta.

-8.6	-8.9	-9.6	8.3	-42.0	-23.7	36.0
39.0	-22.2	25.27	5.9	10.97	-17.3	-4.2
-10.5	-32.4	16.6	15.6	-2.2	-1.6	-6.3

Det motsvarar effekt nummer 7 och 8. Datan i det här exemplet var konstruerad så att effekt 5, 7 och 8 inte skulle följa referensfördelningen. Vi kunde dock inte upptäcka effekt nummer 5.

Exempel: normalfördelningsdiagram

Det kommer alltid finnas en risk att man inte upptäcker effekter som egentligen är skilda från noll eller att man tycker effekter är signifikanta som egentligen är noll.

Dessa risker existerar eftersom datan påverkas av slumpen.

Uppgift 6, tenta 20180313

a)

Konstruera kolumnerna för de tre huvudeffekterna i en 2^3 -försöksplan.

Uppgift 6, tenta 20180313

a)

Konstruera kolumnerna för de tre huvudeffekterna i en 2^3 -försöksplan.

Så de tre kolumnerna måste tillsammans ge alla möjliga kombinationer av faktorerna A,B och C på låg resp. hög nivå på endast 8 rader.

A	B	C
-	-	-
+	-	-
-	+	-
+	+	-
-	-	+
+	-	+
-	+	+
+	+	+

b)

Konstruera kolumnen för trefaktor-samspelseffekten, ABC .

b)

Konstruera kolumnen för trefaktor-samspelseffekten, ABC .

Trefaktorsamspelet kan räknas ut genom att för varje rad i kolumnerna för huvudeffekterna multiplicera dem med varandra.

A	B	C	ABC
-	-	-	-
+	-	-	+
-	+	-	+
+	+	-	-
-	-	+	+
+	-	+	-
-	+	+	-
+	+	+	+

c)

Antag att de också vill analysera en fjärde faktor, D. Konstruera en reducerad försöksplan sådan att skattade effekter av huvudeffekter aldrig sammanblandas med andra huvudeffekter eller tvåfaktor-samspelseffekter.

c)

Antag att de också vill analysera en fjärde faktor, D . Konstruera en reducerad försöksplan sådan att skattade effekter av huvudeffekter aldrig sammanblandas med andra huvudeffekter eller tvåfaktor-samspelseffekter.

Om vi väljer generatoren $D = ABC$ så lyckas vi med detta.

Effekt	Effekt $\cdot I$	Alias
A	$A = A \cdot ABCD$	BCD
B	$B = B \cdot ABCD$	ACD
C	$C = C \cdot ABCD$	ABD
D	$D = D \cdot ABCD$	ABC

d)

Vad är upplösningen på den reducerade försöksplanen?

d)

Vad är upplösningen på den reducerade försöksplanen?

Upplösningen blir IV eftersom vi har fyra bokstäver i ordet i vår definierande relation.