

Svar eller kortfattade lösningar till
Tentamen 14:e mars 2020

1. Först: $\int_0^x \sin x^2 dy = x \sin x^2$
Sedan: $\int_0^1 x \sin x^2 = \frac{1 - \cos 1}{2}$ som är svaret.
2. Med $h = x^2 + 4y^2$ blir $\nabla h = 2(x, 4y)$ så gradienterna är parallella
när $\begin{vmatrix} y & x \\ x & 4y \end{vmatrix} = 0$, dvs när $x^2 = 4y^2$. Tillsammans med villkoret $h = 1$ får
vi att $x^2 = 4, y^2 = 1$.
Svar: minsta värde är -2, största är +2
3. Låt $f = x^4 + x^2y + y^4$. Då är $\nabla f = (4x^3 + 2xy, x^2 + 4y^3)$ som är $= (6, 5)$ i
punkten $(1, 1)$.
Svar: $6(x - 1) + 5(y - 1) = 0$
4. Med rymdpolära koordinater får vi
$$\iiint_E x^2 + y^2 + z^2 dV = \iiint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} r^4 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{2\pi}{5}$$
5. Fältet är konservativt med potential $U = z \ln(x^2 + y) + z^2$.
Så $\int_C F dr = U(1, 1, 1 + \pi) - U(1, 1, 1) = \pi \ln 2 + (\pi + 1)^2 - 1$
6. Låt θ vara vinkeln mellan a och ∇f och φ vinkeln mellan b och ∇f . Då gäller
antingen $\theta - \varphi = \frac{\pi}{2}$ eller $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$
Så $(f'_a)^2 + (f'_b)^2 = |\nabla f|^2 \cos^2 \theta + |\nabla f|^2 \cos^2 \varphi = |\nabla f|^2$ eftersom
 $\cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right) = \mp \sin \varphi$ och $|a| = |b| = 1$
Svar: 0

7. Låt $-C$ vara kurvan med omvänd orientering och låt K vara sträckan $y = 0, 0 \leq x \leq \pi$

Då ger Greens formel: $\int_{-C+K} (\sin x - y^2) dx + (xy + e^y) dy = \iint_D 3y dx dy$

där D är området $\begin{cases} 0 \leq y \leq \sin x \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$. Vi får $\iint_D 3y dx dy = \frac{3\pi}{4}$

Vidare blir kurvintegralen längs K : $\int_0^\pi \sin x dx = 2$.

Med hänsyn taget till orientering blir $\int_C (\sin x - y^2) dx + (xy + e^y) dy = 2 - \frac{3\pi}{4}$

8. Variabelbyte: $\begin{cases} s = x - 2y \\ t = 2x - y \end{cases}$ ger

$$\iint_D (x - 2y) \sin(2x - y) dx dy = \iint_{\substack{-3 \leq s \leq 0 \\ 0 \leq t \leq 3}} s \sin t \frac{1}{3} ds dt = \frac{3(\cos 3 - 1)}{2}$$

9. Vi lägger till en yta L : $\begin{cases} 2x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 1 \end{cases}$ så att "Y+L" blir en sluten yta, där Y är $z = 2x^2 + y^2$.

Divergensatsen ger $\iint_{Y+L} F \cdot N dS = \iiint_E \operatorname{div} F dV = \iiint_E 4z dV$ där E är området innanför "Y+L". Normalen riktad utåt.

Vi integrerar först i z -led: $\int_{2x^2+y^2}^1 4z dz = 2 - 2(2x^2 + y^2)^2$. Sedan

$$\begin{aligned} \text{blir } \iiint_E 4z dV &= 2 \iint_{2x^2+y^2 \leq 1} 1 - (2x^2 + y^2)^2 dx dy = 2 \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} (1 - r^4) \frac{r}{\sqrt{2}} dr d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} \end{aligned}$$

På L använder vi $N = (0,0,1)$ så att $F \cdot N = z^2 = 1$ och $\iint_L F \cdot N dS = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Efter att vi korregerar för orienteringen blir svaret: $\frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

10. För att bestämma stationära punkter löser vi systemet

$$\begin{cases} y^2(1 - 2x^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \\ 2xy(1 - y^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \text{ och får } (x, 0), \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1\right)$$

När det gäller största och minsta värde observerar vi att med polära koordinater blir $|f| = |r^3 \cos t \sin^2 t e^{-r^2}| \leq r^3 e^{-r^2} \rightarrow 0$ då $r \rightarrow \infty$.

Därför kommer f utanför en cirkel $x^2 + y^2 = C$ med ett tillräckligt stort C vara så nära 0 att det största och minsta värde som finns i det kompakta området $x^2 + y^2 \leq C$ också vara största och minsta över hela planet.

Svar: största och minsta värde är respektive $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{3}{2}}$