

**Svar och ibland kortfattade och ofullständiga lösningar till tentamen
MVE270 8:e juni 2020**

1. Svar: $x + y - 3z + 3 = 0$
2. Vi ser att $f(x,y)$ är $= 0$ på randen och >0 innanför, så minsta värde är $= 0$ och största värde antas i en stationär punkt.
Den enda stationära punkten är $(x,y) = (1/3, 1/3)$.

Svar: max är $1/27$ och min är 0 .
3. Vi använder Greens formel för att omvandla den givna kurvintegralen till dubbelintegralen $\iint_{x^2+y^2 \leq 4} (1 - 6y) dx dy = 4\pi$
4. Vi har $f'_v = \nabla f \cdot v = (2,1) \cdot \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$
5. Vi betraktar de två ytorna som nivåytor vars funktioner har gradienterna $(x,y,0)$ respektive $(0,y,z)$. Gradienternas kryssprodukt i den givna punkten bildar den sökta vektorns riktning: $(1, -1, 0) \times (0, -1, 1) = -(1, 1, 1)$

Svar: $(1, 1, 1)$ eller någon parallell riktning.
6. Funktionen kan uppenbart anta hur stora värden som helst. Vi ser också att den är positiv i det givna området och att den växer obegränsat såväl då $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ som när vi närmar oss någon av koordinataxlarna.
Det följer att det finns ett minsta värde i en stationär punkt.

Eftersom $f'_x = 1 - \frac{1}{yx^2}$ och $f'_y = 8 - \frac{1}{xy^2}$ skall vi lösa systemet $\begin{cases} yx^2 = 1 \\ xy^2 = 1/8 \end{cases}$
Genom att till exempel kvadrerar den övre ekvationen och dividera ledvis får vi en enda lösning: $(x,y) = \left(2, \frac{1}{4}\right)$

Svar: största värde saknas, minsta värde är 6 .

7. Eftersom området begränsas av den sneda linjen $x + y = 1$ blir gränserna för de

polära koordinaterna: $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \end{cases}$ och den givna dubbelintegralen

transformeras till $\iint_D r e^{\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta}} dr d\theta$ där D beskrivs av olikheterna ovan. Efter att

integrerar först i r får vi enkelintegralen $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta}} \frac{d\theta}{2(\sin \theta + \cos \theta)^2}$ som efter lite räkningar blir $= \frac{1}{4} \left(e - \frac{1}{e} \right)$

8. Med $z = x^2 - y^2$ får vi $r'_x \times r'_y = (-2x, 2y, 1)$ med rätt orientering.

Då blir $\iint_Y F \cdot NdS = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (-2x, 2y, 1) \cdot (x, x, 1) dx dy = (\text{polära koordinater})$
 $= \iint_{\substack{0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} (1 + r^2 \sin 2\theta - 2r^2 \cos^2 \theta) r dr d\theta = \frac{\pi a^2}{2} (2 - a^2)$

9. Området E beskrivs av olikheterna: $\begin{cases} 0 \leq z \leq y \\ 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$ Om vi integrerar först i z-led och

sedan i x-led får vi att den givna trippelintegralen blir $= \int_0^1 y^2 \sin \pi y^3 dy = \frac{2}{3\pi}$

10. Om F är fältet i kurvintegralen blir $\text{rot} F = (0, 0, 2x)$. Vi använder Stokes formel och utnyttjar att kurvan ligger i planet $x + y + z = 3$. Vi betraktar detta plan som funktionsytan $z = 3 - x - y$ och får $r'_x \times r'_y = (1, 1, 1)$ med rätt orientering.

Alltså: $\int_C F dr = \iint_Y (\text{rot } F) \cdot NdS = \iint_D 2x dx dy$. Här är Y planet innanför kurvan och D området innanför $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. Polära koordinater, dvs $\begin{cases} x = 1 + r \cos \theta \\ y = 1 + r \sin \theta \end{cases}$ ger $\iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} (2r + 2r^2 \cos \theta) dr d\theta = 2\pi$