MVE 270 Omtenta augusti 2020

Lösningsförslag

Uppgift 1

a) Allmän ekvation för tangentplanet

$$z = T(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)^T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right)$$

Här $x_0=-1$, $y_0=1$ och

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x-2)e^{x^2-2x+4y^2-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8y\,e^{x^2-2x+4y^2-1}$$

Tg $z = T(x,y) = e^4\left[1-4(x+1)+8(y-1)\right]$.

b) Först, lös $f(x,y)=1$, dvs $e^{x^2-2x+4y^2-1}=1$

$\iff x^2-2x+4y^2-1=0$

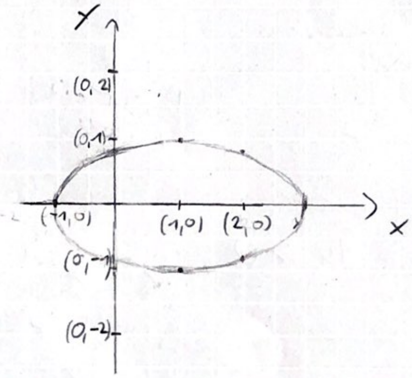
Kvadratkomplettering på vänsterled

$$(x^2-2x+1)-1+4y^2-1=0$$

$$\iff \frac{(x^2-1)^2}{2^2}+y^2=1$$

Ellips med centrum $(1,0)$
1 som längd på halva lillaxeln i y-led och
2 som längd på halva storaxeln i x-led.

Rita:



Uppgift 2

i) $f(x,y,z) \to \infty$ om $(x,y,z) \to (0,0,0)$

ii) $f(x,y,z) \to \infty$ om $x \to \pm\infty$, $y \to \pm\infty$ eller $z \to \pm\infty$

Funktionen antar ändliga värden emellan och har därför ett minsta värde.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x\left[1 - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right] \\ 2y\left[1 - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right] \\ 2z\left[1 - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right] \end{pmatrix}$$

$\nabla f = 0 \iff (x,y,z) = (0,0,0)$ inte i definitionsmängden

eller $1 - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} = 0 \iff x^2+y^2+z^2 = 1$

Pga i) + ii) : Funktionen är minimal $\forall x,y,z : x^2+y^2+z^2=1$

och då är $f(x,y,z) = 2$

Alternativt: Låt $r = \|(x,y,z)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Så att

$$f(x,y,z) = f(r) = r^2 + \frac{1}{r^2}$$

f beror enbart på längden av (x,y,z)

i) $f(r) \to \infty$ för $r \to 0$

ii) $f(r) \to \infty$ för $r \to \infty$

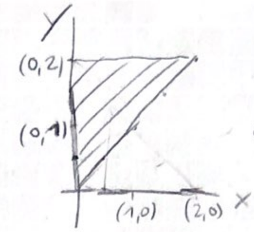
$$\frac{df}{dr} = 2r - \frac{2}{r^3} \overset{!}{=} 0 \iff r^4 = 1 \overset{r>0}{\implies} r = 1$$

$$\left.\frac{d^2f}{dr^2}\right|_{r=1} = 2 + \left.\frac{12}{r^4}\right|_{r=1} = 14 > 0$$, ty f antar ett minimum i $r=1$

dvs $\forall x,y,z : x^2+y^2+z^2=1$

Uppgift 3

$$\int_0^2\left(\int_0^y f\,dx\right)dy = \int_0^2\left(\int_x^2 f\,dy\right)dx$$

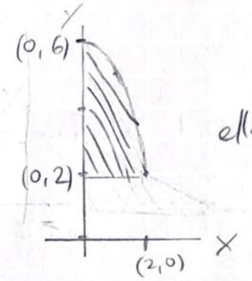


$0 \le 2 \le y$
$0 \le x \le y$

eller

$0 \le x \le 2$
$x \le y \le 2$

$$\int_2^6\left(\int_0^{\sqrt{6-y}} f\,dx\right)dy = \int_0^2\left(\int_2^{6-x^2} f\,dy\right)dx$$



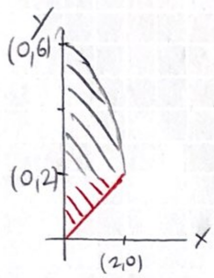
$2 \le y \le 6$
$0 \le x \le \sqrt{6-y}$

eller

$0 \le x \le 2$
$2 \le y \le 6-x^2$

[$x=\sqrt{6-y} \overset{x\ge 0}{\iff} y=6-x^2$

Kombiniera båda mängder



$$D=\{(x,y): 0\le x\le 2,\ x\le y\le 6-x^2\}$$

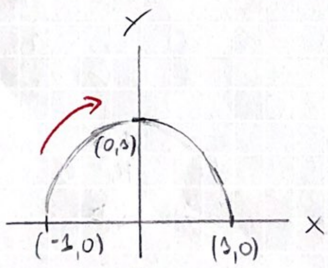
Ty

$$\int_0^2\int_0^y f\,dx\,dy + \int_2^6\int_0^{\sqrt{6-y}} f\,dx\,dy = \int_0^2\int_x^{6-x^2} f\,dy\,dx$$

Uppgift 4

Kurva C

$y=\sqrt{9-x^2}$



Parametrisk form

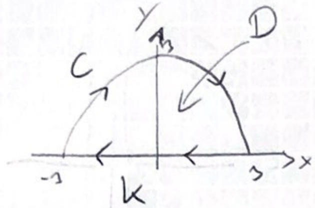
$\gamma(t)=(-3\cos(\pi t),\ 3\sin(\pi t))$
$0\le t\le 1$

$$\int_C x^2y\,dx - xy^2\,dy = \int_0^1 \gamma_1^2(t)\,\gamma_2(t)\,\gamma_1'(t) - \gamma_1(t)\,\gamma_2(t)\,\gamma_2'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 9\cos^2(\pi t)\cdot 3\sin(\pi t)\,3\pi\sin(\pi t) - (-3\cos(\pi t))\,9\sin^2(\pi t)\,3\pi\cos(\pi t)\,dt$$

$$= 81\pi\cdot 2\cdot\int_0^1 \underbrace{\sin^2(\pi t)\cos^2(\pi t)}_{=\frac{1}{4}\sin^2(2\pi t)=\frac{1}{8}(1-\cos(4\pi t))}dt = \frac{1}{8}\cdot 81\cdot\pi\cdot 2 = \frac{81}{4}\pi$$

Alternativ för Uppgift 4



Stäng kurvan C med hjälp av kurvan K

Använd Greens sats (med omvänt tecken

då kurvan genomlöps medurs)

$$\int_{C+K} \underbrace{x^2y}_{=P}dx - \underbrace{xy^2}_{=Q}dy = -\iint_D (-y^2) - x^2\,dxdy = \iint_D x^2+y^2\,dxdy = (*)$$

Använd polära koordinater

$$(*) = \int_0^{\pi}\int_0^{3} r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = \pi \frac{1}{4} 3^4 = \frac{81}{4}\pi$$

Vad är $\int_K x^2y\,dx - xy^2\,dy$?

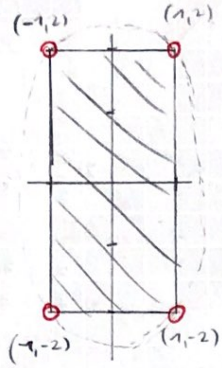
Använd parametriseringen $x = 3-6s$, $y=0$ för $0 \le s \le 1$

då är $dx = -6$, $dy = 0$ och

$$\int_K x^2y\,dx - xy^2\,dy = \int_K 0 = 0.$$

Svaret är alltså $\int_C x^2y\,dx - xy^2\,dy = \frac{81}{4}\pi.$

Uppgift 5



Den minsta ellipsen måste gå igenom

$(-1,-2), (-1,2), (1,2), (1,-2)$

Ty

$$\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$$

Arean av en ellips

$$A(a,b) = \pi\, a \cdot b \quad \leftarrow \text{ ska minimeras}$$

Sidvillkor

$$g(a,b) = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} - 1$$

Lagrange funktion

$$L(a,b,\lambda) = A(a,b) + \lambda g(a,b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \pi b + \frac{2\lambda}{a^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi a b}{2\lambda} = -\frac{1}{a^2} \quad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \pi a + \frac{8\lambda}{b^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi a b}{2\lambda} = -\frac{4}{b^2} \quad (\mathrm{II})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \quad (\mathrm{III})$$

Med $(\mathrm{I}) + (\mathrm{II})$: $\frac{\pi a b}{2\lambda} + \frac{\pi a b}{2\lambda} = -\frac{1}{a^2} - \frac{4}{b^2}$

Med (III) : $\frac{1}{\lambda}\pi a b = -1$

$$\Rightarrow \lambda = -\pi a b$$

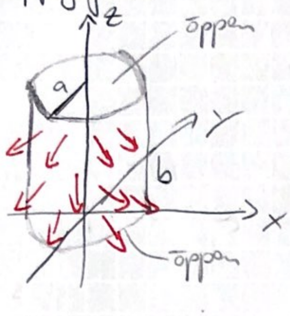
Ty $(\mathrm{I}) \Rightarrow a^2 = 2 \overset{a>0}{\Rightarrow} a = \sqrt{2}$

$(\mathrm{II}) \Rightarrow b^2 = 8 \overset{b>0}{\Rightarrow} b = 2\sqrt{2}$

Arean av minsta ellipsen

$\pi \cdot \sqrt{2}\, 2\sqrt{2} = 4\pi$

Uppgift 6



Cylinder $E = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le a^2, 0 \le z \le b\}$

Låt $A = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = a^2, 0 \le z \le b\}$

$L_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le a^2, z = 0\}$

$L_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le a^2, z = b\}$

Vi vill beräkna $\iint_A \vec{F} \cdot d\vec{S}$, flödet genom cylinderns yta

Använd Gausssatsen/divergenssatsen på hela cylindern

$$\iint_{A \cup L_1 \cup L_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV, \text{ så är } \iint_A \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV - \iint_{L_1 \cup L_2} \vec{F} \cdot dS$$

Här

$$\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x} = b y^2, \quad \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial y} = b x^2, \quad \frac{\partial \vec{F}_3}{\partial z} = 2z(x^2+y^2)$$

dy $\operatorname{div} \vec{F} = (x^2+y^2)(b+2z)$

Integrerar i z-led

$$\iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iint_{x^2+y^2 \le a} (x^2+y^2) \overbrace{\int_0^b (b+2z) \, dz}^{= z^2 + bz \Big|_0^b = 2b^2} \, dx dy$$

$$= 2b^2 \iint_{x^2+y^2 \le a} (x^2+y^2) \, dx dy = (*)$$

Byt till polära koordinater

$$(*) = 2b^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \cdot r \, dr \, d\theta = 4\pi b^2 \frac{1}{4} a^4 = \pi b^2 a^4$$

Fortsättning $\rightarrow$

För att beräkna $\iint_{L_1 \cup L_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{L_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS + \iint_{L_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS$

vi vet att $\vec{n}_1 = (0,0,-1)$ och $\vec{n}_2 = (0,0,1)$.

Vi ser

$$\iint_{L_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS = \iint -(x^2+z^2) \cdot 0 \, dx dy = 0$$

och

$$\iint_{L_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS = \iint (x^2+y^2) \cdot b^2 \, dx dy = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{byt till} \\ \text{polära koordinater}}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^a b^2 r^2 \cdot r \, dr \, d\theta = 2\pi b^2 \frac{1}{4} a^4$$

$$= \frac{1}{2} \pi b^2 a^4$$

Allt ihop får vi alltså

$$\iint_A \vec{F} \cdot d\vec{S} = \pi b^2 a^4 - \frac{1}{2} \pi b^2 a^4 = \frac{1}{2} b^2 a^4 \pi$$

Uppgift 7

Vi vet $f_v'(1,-1,1) = 0$. Använd $f_v'(x) = \nabla f(x) \cdot v$.

Vi vill bestämma v.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+z \\ y+2z \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \nabla f(1,-1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f'_v(1,-1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot v = 0, \text{ dvs } -2v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \quad \text{I}$$

Utöver det, notera att $n = (1,1,1)$ är en normal till planet $x+y+z=1$. Vi vet att myran kryper i planet och därför måste v ligger i planet också. Det betyder att v måste vara ortogonal till n, dvs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot v = 0 \iff v_1 + v_2 + v_3 = 0 \quad \text{II}$$

$$\text{I} - \text{II}: \; -3v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{3} v_2$$

$$; \; \text{II}: \; \frac{4}{3} v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = -\frac{4}{3} v_2$$

Låt $v_2 = \lambda$ en fri parameter så är

$$v = \lambda \left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{4}{3} \right)$$

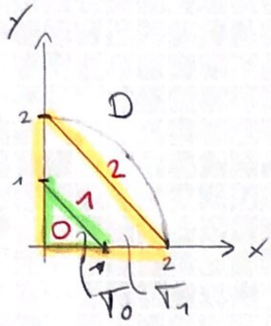
Använd att v måste vara en enhetsvektor för att bestämma λ

$$1 \overset{!}{=} \|v\|_2 = \lambda \sqrt{\frac{1}{9} + 1 + \frac{16}{9}} = \lambda \sqrt{\frac{26}{9}} = \frac{\lambda}{3}\sqrt{26}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{3}{\sqrt{26}}$$

Svar: $v = \frac{1}{\sqrt{26}}(1, 3, -4)$

Uppgift 8



Funktionen $\lfloor x+y \rfloor$ antar tre olika värden i första kvadranten i området $x^2+y^2 \le 4$, dessa är 0, 1 och 2.

Tänker man integralen som volym så kan den beräknas som

$$\iint_D \lfloor x+y \rfloor \, dx\,dy = 2 \cdot \text{area}(D) - \text{area}(T_1) - \text{area}(T_0)$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi \cdot 4}{4} - \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = 2\pi - \frac{5}{2}$$

Uppgift 9

Delen av ytan $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför planet $z = 2x+1$ är

$$2x+1 \leq 4 - x^2 - y^2 \iff (x+1)^2 + y^2 \leq 4$$

Vi vill alltså beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

där S beskrivs av funktionsytan $z = f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

där $(x,y) \in D = \{(x,y) : (x+1)^2 + y^2 \leq 4\}$.

För funktionsytor gäller att

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D \vec{F} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} dx\,dy$$

där den nedåtgående normalen valdes.

Integralen blir alltså

$$\iint_D \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -1 \end{pmatrix} dx\,dy = -\iint_D 2x^2 + 2y^2 + 1 \, dx\,dy$$

$$\underset{\text{byt till polära koordinater}}{=} -\int_0^{2\pi}\int_0^2 (2r^2+1) r \, dr\, d\theta = -2\pi\left(\frac{2}{4}2^4 + \frac{1}{2}2^2\right)$$

$$= -20\pi$$