MVE425 Matematik, del C, våren 2019, föreläsning 1

Mårten Wadenbäck

Höger- och vänsterderivator, kontinuitet, och deriveringsregler

Vi säger att en funktion f är deriverbar i $a \in D_f$ om $f'(a)$ existerar. Då $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ser vi att f är deriverbar i $a \in D_f$ precis då

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_-(a),$$

där $f'_+(a)$ kallas <u>högerderivatan</u> av f i a och $f'_-(a)$ kallas <u>vänsterderivatan</u>.

En funktion är inte alltid deriverbar överallt där den är definierad, och det är inte säkert att den har höger- eller vänsterderivata överallt.

Vi har definierat två begrepp med hjälp av gränsvärden:

(i) kontinuitet, och

(ii) deriverbarhet.

Hänger dessa ihop? I så fall, hur? Vi har tre möjligheter: $(i) \overset{?}{\Rightarrow} (ii)$, $(ii) \overset{?}{\Rightarrow} (i)$, och $(i) \overset{?}{\Leftrightarrow} (ii)$.

Sats: Om f är deriverbar i $a \in D_f$ så är f även kontinuerlig i a.

Bevis: Eftersom f är deriverbar i a existerar

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$ Vi vill visa att $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

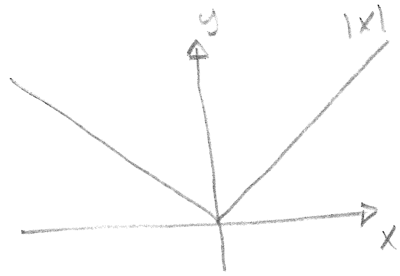
Vi ser att

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} f(a+h) - f(a) + f(a) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h + f(a) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a),$$

dvs f är kontinuerlig i a.

Det omvända gäller inte!



Exempel: Om $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$

gäller $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$

och $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$,

så $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ (dvs f är kontinuerlig i $x=0$).

Vi får även $f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h+0| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$

och $f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h+0| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$.

Då $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ är f inte deriverbar i $x=0$.

Slutsats: Kanter och spetsar är inte deriverbara.

För derivator gäller ett antal praktiska räkneregler (deriveringsregler)

Sats: Om f och g är deriverbara funktioner gäller att

(i) $D[f(x)+g(x)] = D[f(x)] + D[g(x)]$
(ii) $D[cf(x)] = c \cdot D[f(x)]$ om c konstant } linearitet
(iii) $D[f(x)g(x)] = D[f(x)]\,g(x) + f(x) \cdot D[g(x)]$ produktregeln
(iv) $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{D[f(x)]g(x) - f(x)\cdot D[g(x)]}{g(x)^2}$ om $g(x) \neq 0$ kvotregeln

Bevis: (i) Låt $z(x) = f(x)+g(x)$. Då gäller att

$$z'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{z(x+h)-z(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x),$$

dvs $D[f(x)+g(x)] = D[f(x)] + D[g(x)]$.

(ii) Det gäller att

$$D[cf(x)] = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = \lim_{h\to 0} c \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c\cdot f'(x),$$

dvs $D[cf(x)] = c\,D[f(x)]$.

Exempel: Beräkna $f'(x)$ om $f(x) = 2x^5 - 3x\sqrt{x} + 7$ $\quad(= 2x^5 - 3x^{3/2} + 7)$

Vi får

$$D[2x^5 - 3x^{3/2} + 7] = D[2x^5] + D[-3x^{3/2}] + D[7] =$$

$$= 2D[x^5] - 3D[x^{3/2}] + D[7] = 2\cdot 5x^4 - 3\cdot\tfrac{3}{2}x^{1/2} + 0 =$$

$$= 10x^4 - \tfrac{9}{2}\sqrt{x}.$$

Svar: $f'(x) = 10x^4 - \frac{9}{2}\sqrt{x}$

Anmärkning: Normalt sett gör vi det inte så detaljerat, utan går direkt från $D[2x^5-3x^{3/2}+7]$ till $10x^4-\frac{9}{2}\sqrt{x}$.

Bevis (fortsättning): (iii) Låt $z(x)=f(x)g(x)$. Då blir

$$z'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\underbrace{g(x+h)}_{\to g(x)\text{ då } g \text{ kontinuerlig}}+\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

dvs $D[f(x)g(x)]=D[f(x)]g(x)+f(x)D[g(x)]$.

Exempel: Bestäm derivatan till $f(x)=(x^3+2)\sqrt{x}$.

Produktregeln ger

$$f'(x)=D[(x^3+2)\sqrt{x}]=D[x^3+2]\sqrt{x}+(x^3+2)D[\sqrt{x}]=$$

$$=(3x^2+0)\sqrt{x}+(x^3+2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=3x^2\sqrt{x}+\frac{x^3+2}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{6x^3+x^3+2}{2\sqrt{x}}=\frac{7x^3+2}{2\sqrt{x}}.$$

Svar: $f'(x)=\frac{7x^3+2}{2\sqrt{x}}$.

Bevis (fortsättning): (iv) Vi tillåter oss att antaga att $R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ är deriverbar (det är sant, men vi bevisar det inte).

Då gäller att $f(x) = R(x)\,g(x)$, och

produktregeln ger

$$f'(x) = R'(x)\,g(x) + R(x)\,g'(x).$$

Vi löser ut $R'(x)$:

$$R'(x)\,g(x) = f'(x) - R(x)\,g'(x) \Leftrightarrow$$

$$R'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{R(x)\,g'(x)}{g(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{\frac{f(x)}{g(x)}\,g'(x)}{g(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2} =$$

$$= \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Alltså är $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}.$

Exempel: Bestäm derivatan av $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$.

Kvotregeln ger

$$f'(x) = \frac{D[\sqrt{x}\,](1+x^2) - \sqrt{x}\;D[1+x^2]}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(1+x^2) - \sqrt{x}\cdot(0+2x)}{(1+x^2)^2} = \left[\begin{matrix}\text{Förläng}\\ \text{med } 2\sqrt{x}\end{matrix}\right] = \frac{1+x^2-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}.$$

Svar: $f'(x) = \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^2}.$