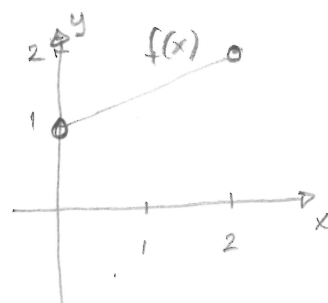


Existens av max/min, medelvärdessatsen, växande/avtagande

Alla funktioner antar inte största och minsta värden.

Exempel: Låt $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ med $D_f = (0, 2)$.

Då antar f varken ett största eller minsta värde.



Sats: Om f är en kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$ så antar f både ett största och ett minsta värde på $[a, b]$.

Beris: Ingar ej!

En funktion kan anta ett största och ett minsta värde även om förutsättningarna i satsen inte är uppfyllda, men det är inte säkert!

Definition: Låt f vara en funktion definierad på ett intervall I . Om det för alla $x_1, x_2 \in I$ gäller att

(i) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ kallas f växande på I .

(ii) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ kallas f strängt växande på I .

(iii) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ kallas f avtagande på I .

(iv) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ kallas f strängt avtagande på I .

En funktion som är (strängt) växande eller avtagande kallas (strängt) monoton.

Exempel: Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ är strängt avtagande på både $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$, men inte på $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Detta ser vi på följande sätt.

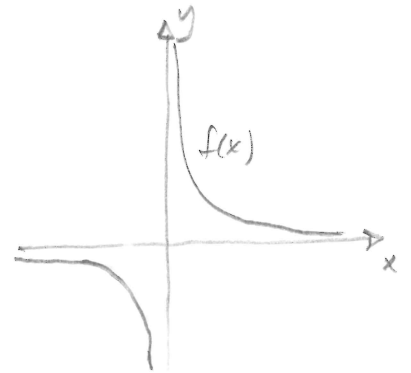
Om $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ och $x_1 < x_2$

$$\text{blir } f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0,$$

så $f(x_1) > f(x_2)$ och f är strängt växande.

På samma sätt får vi att f är strängt växande på $(0, \infty)$.

Däremot är till exempel $f(1) > f(-1)$ trots att $1 > -1$, så f är inte (strängt) växande på $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.



Definitionen av växande/avtagande är ibland svår att använda i praktiken, så istället använder vi ofta en följsats till Lagranges medelvärdessats för att avgöra om en funktion är (strängt) växande/avtagande på ett intervall.

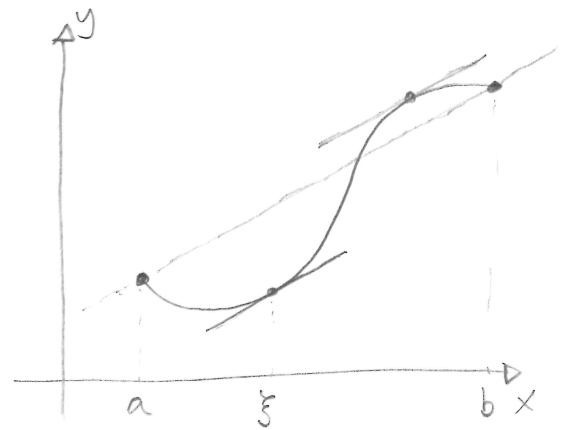
Sats (Lagranges medelvärdessats): Antag att funktionen f uppfyller:

- (i) f är kontinuerlig på $[a, b]$
- (ii) f är deriverbar på (a, b) .

Då existerar det (minst) ett $\xi \in (a, b)$ så att $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Beris: Ingår ej!

Geometriskt säger satsen att det finns något $\xi \in (a, b)$ så att lutningen i ξ är lika med funktionens medellutning på $[a, b]$.



Följsats: Antag att f är deriverbar på ett intervall I .

Då gäller att:

- (i) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ är strängt växande på I .
- (ii) $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ är konstant på I .
- (iii) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ är strängt avtagande på I .
- (iv) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ är växande på I .
- (v) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ är avtagande på I .

Beris: Låt $x_1, x_2 \in I$ och antag att $x_1 < x_2$. Nu är f kontinuerlig på $[x_1, x_2]$ och deriverbar på (x_1, x_2) , så vi kan använda medelvärdessatsen, dvs det finns ett $\xi \in (x_1, x_2)$ sådant

$$\text{att } f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}.$$

I de olika fallen får vi därför:

$$(i) \quad f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1),$$

dvs f är strängt växande på I .

$$(ii) \quad f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{=0} (x_2 - x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1),$$

dvs f är konstant på I .

$$(iii) \quad f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{<0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} < 0 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1),$$

dvs f är strängt avtagande på I .

$$(iv) \quad f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq 0 \Leftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1),$$

dvs f är växande på I .

$$(v) \quad f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\leq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \leq 0 \Leftrightarrow f(x_2) \leq f(x_1),$$

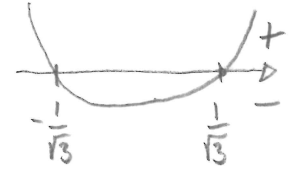
dvs f är avtagande på I .

Exempel: Avgör var funktionen $f(x) = x^3 - x$ är växande respektive avtagande.

Vi deriverar f och gör en förenklad teckentabell för f' . Derivatans blir $f'(x) = 3x^2 - 1 = (\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x - 1)$,

(5)

och den förenklade teckentabellen blir



Eftersom $f'(x) \geq 0$ då $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ och då $x \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$

är f växande där, och eftersom $f'(x) \leq 0$ på $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$

är f avtagande där.

