Mårten Wadenbäck

Teckenstudier

Vi har nu i princip alla verktyg som behövs för att på ett effektivt sätt beräkna maximum och minimum av funktioner. Satsen om växande/avtagande funktioner ger oss dessutom en metod för att bestämma karaktären av lokala extrempunkter, genom att studera derivatan i omgivningen av dem. Växlar derivatan tecken enligt $+0-$ är det fråga om en lokal maxpunkt, medan $-0+$ innebär en lokal minpunkt. Om det inte sker någon teckenväxling, dvs $+0+$ eller $-0-$, är det fråga om en terrasspunkt.

Exempel: Bestäm alla lokala extrempunkter till $f(x)=10x^6-12x^5-15x^4+20x^3$ med $D_f=\mathbb{R}$, avgör deras karaktär, och skissa grafen.

Vi har en sats som säger att en deriverbar funktion på ett öppet intervall endast kan ha sina lokala extrempunkter i kritiska punkter. Dessa hittar vi genom att derivera f och sätta derivatan till noll:

$$f'(x) = 60x^5 - 60x^4 - 60x^3 + 60x^2 = 60x^2(x^3 - x^2 - x + 1),$$

och $f'(x) = 0$ då $x = 0$ eller då $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$.

Satsen om heltalslösningar säger att alla heltal som uppfyller $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ även uppfyller $x \mid 1$, dvs $x = \pm 1$.

Insättning visar att båda fungerar, så $x^3 - x^2 - x + 1$ har en faktor $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$. Polynomdivision ger

$$\begin{array}{r|l}
 & \;\; x - 1 \\
\hline
x^2 - 1 & x^3 - x^2 - x + 1 \\
 & -(x^3 - x) \\
\hline
 & \quad -x^2 + 1 \\
 & -(-x^2 + 1) \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

så att $x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$.

Vi har alltså de kritiska punkterna $x = 0$ och $x = \pm 1$.

Randpunkter: Det finns egentligen inga, men vi måste ändå undersöka $f(x)$ och $f'(x)$ då $x \to \pm\infty$.

Vi får $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} 10x^6 - 12x^5 - 15x^4 + 20x^3 =$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{x^6}_{\to \infty} \underbrace{\left(10 - \frac{12}{x} - \frac{15}{x^2} + \frac{20}{x^3}\right)}_{\to 10} = \infty$$

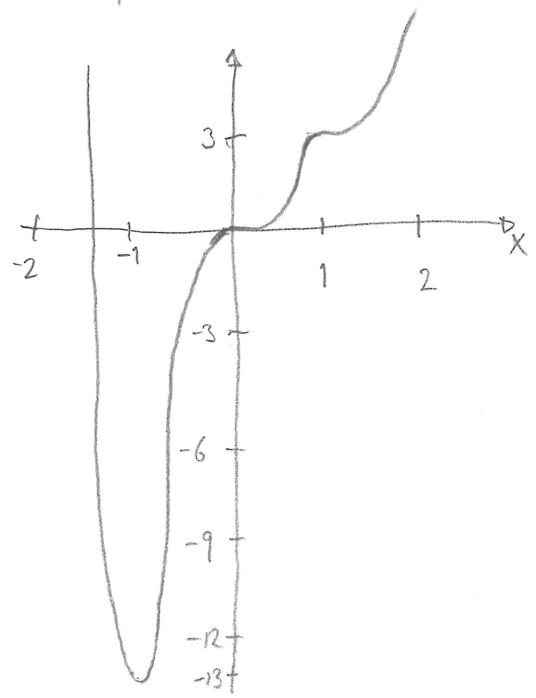
och på motsvarande sätt får vi $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = \infty$ och $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$.

Singulära punkter: Saknas.

Allt vi nu vet om funktionen kan sammanfattas i en (fullständig) teckentabell:

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	∞
$f(x)$	∞	$\searrow$	-13	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	∞

Detta låter oss skissa grafen:



Enda lokala extrempunkten är $x=-1$ som är ett (globalt) minimum. Funktionen har terrasspunkter i $x=0$ och $x=1$, och antar godtyckligt stora värden då $x \to \pm\infty$.

Exempel: Bestäm alla lokala extrempunkter till $f(x)=\sqrt{|x^2-3|}$ med $D_f=[-2,3)$, och skissa kurvan.

Kritiska punkter:

Vi delar upp i fall på grund av absolutbeloppet, och får
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-3} & \text{om } x^2-3\geq 0\\ \sqrt{3-x^2} & \text{om } x^2-3<0.\end{cases}$$

Funktionen är troligen inte deriverbar då $x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$ (vi undersöker strax), men

För $x \neq \pm\sqrt{3}$ får vi

$$f'(x) = \begin{cases} D\left[\sqrt{x^2-3}\right] & \text{om} \quad x^2 > 3 \\ D\left[\sqrt{3-x^2}\right] & \text{om} \quad x^2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x^2-3}} \cdot 2x & \text{om} \quad x^2 > 3 \\ \frac{1}{2\sqrt{3-x^2}} \cdot (-2x) & \text{om} \quad x^2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} & \text{om} \quad x^2 > 3 \\ -\frac{x}{\sqrt{3-x^2}} & \text{om} \quad x^2 < 3 \end{cases}$$

Eftersom $\lim_{x\to-\sqrt{3}^-} f'(x) = \lim_{x\to-\sqrt{3}^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} = \text{"}\frac{-\sqrt{3}}{+0}\text{"} = -\infty$

och $\lim_{x\to-\sqrt{3}^+} f'(x) = \lim_{x\to-\sqrt{3}^+} -\frac{x}{\sqrt{3-x^2}} = \text{"}-\frac{-\sqrt{3}}{+0}\text{"} = +\infty$

kan inte $f'(-\sqrt{3})$ existera. På samma sätt kan inte $f'(\sqrt{3})$ existera, eftersom $\lim_{x\to\sqrt{3}^-} f'(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to\sqrt{3}^+} f'(x) = +\infty$.

Enda nollstället till $f'(x)$ ges av $-\frac{x}{\sqrt{3-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Randpunkter: $x=-2$ är enda randpunkten, men vi vill ändå undersöka vad som händer då $x \to 3^-$.

Vi ser att $f(-2)=1$ och $\lim_{x\to-2^+} f'(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} = -2$,

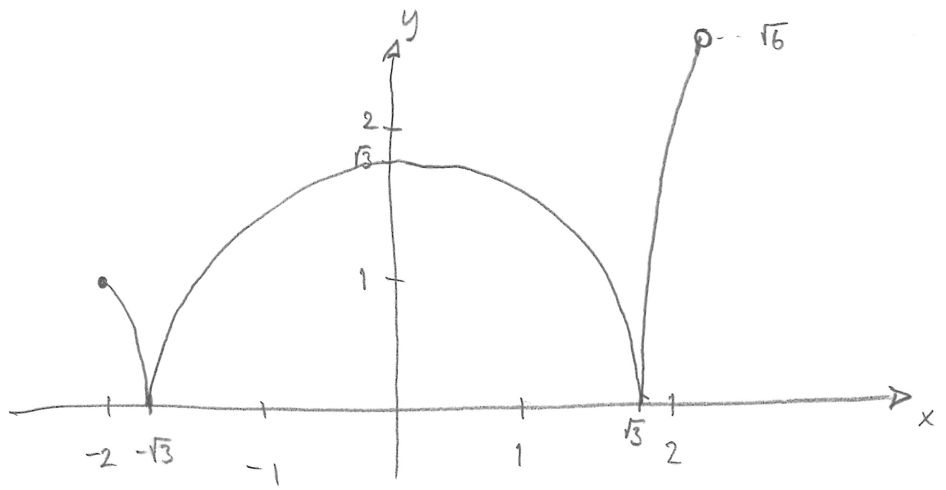
medan $\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-} \sqrt{|x^2-3|} = \sqrt{6}$ och $\lim_{x\to3^-} f'(x) = \lim_{x\to3^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Singulära punkter: Vi såg ovan att $f'(x)$ saknas då $x = \pm\sqrt{3}$.

Vi sammanfattar allt vi vet i en teckentabell:

x	-2		$-\sqrt{3}^-$	$-\sqrt{3}^+$		0		$\sqrt{3}^-$	$\sqrt{3}^+$		(3)
$f'(x)$	(-2)	$-$	$(-\infty)$	$(+\infty)$	$+$	0	$-$	$(-\infty)$	$(+\infty)$	$+$	$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0	0	$\nearrow$	$(\sqrt{6})$

Med hjälp av teckentabellen skissar vi kurvan:



Funktionen saknar globalt maximum, men lokala maxima antas då $x=-2$ och då $x=0$. Globala minima finns i punkterna $x=\pm\sqrt{3}$.