Mårten Wadenbäck

Andraderivator

Vi har sett att teckentabeller är användbara för att avgöra karaktären av kritiska punkter. Ibland går detta dock att avgöra på ett annat smidigt sätt, som bygger på den så kallade andra-derivatan.

Definition: En funktion f sägs vara två gånger deriverbar på ett intervall I om $D[f'(x)]$ existerar för alla $x \in I$. Funktionen $D[f'(x)]$ betecknas $f''(x)$ och kallas andraderivata (uttalas ofta f-bis).

Andra vanliga beteckningar för andraderivatan är:

$$D^2[f(x)], \quad \frac{d^2f}{dx^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ddot{f}, \quad \ldots$$

Exempel: Om $f(x) = xe^{-x}$ är $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + xe^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(1-x)$ och $f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}(2-x) = e^{-x}(x-2)$.

I fysiken tolkas derivator ofta som hastigheter, och andra-derivator blir då acceleration. Geometriskt har vi tolkat derivator som tangentlinjens lutning. För att kunna tolka andraderivator geometriskt behöver vi nya begrepp.

Definition: Låt f vara en funktion definierad på ett intervall $[a,b]$.

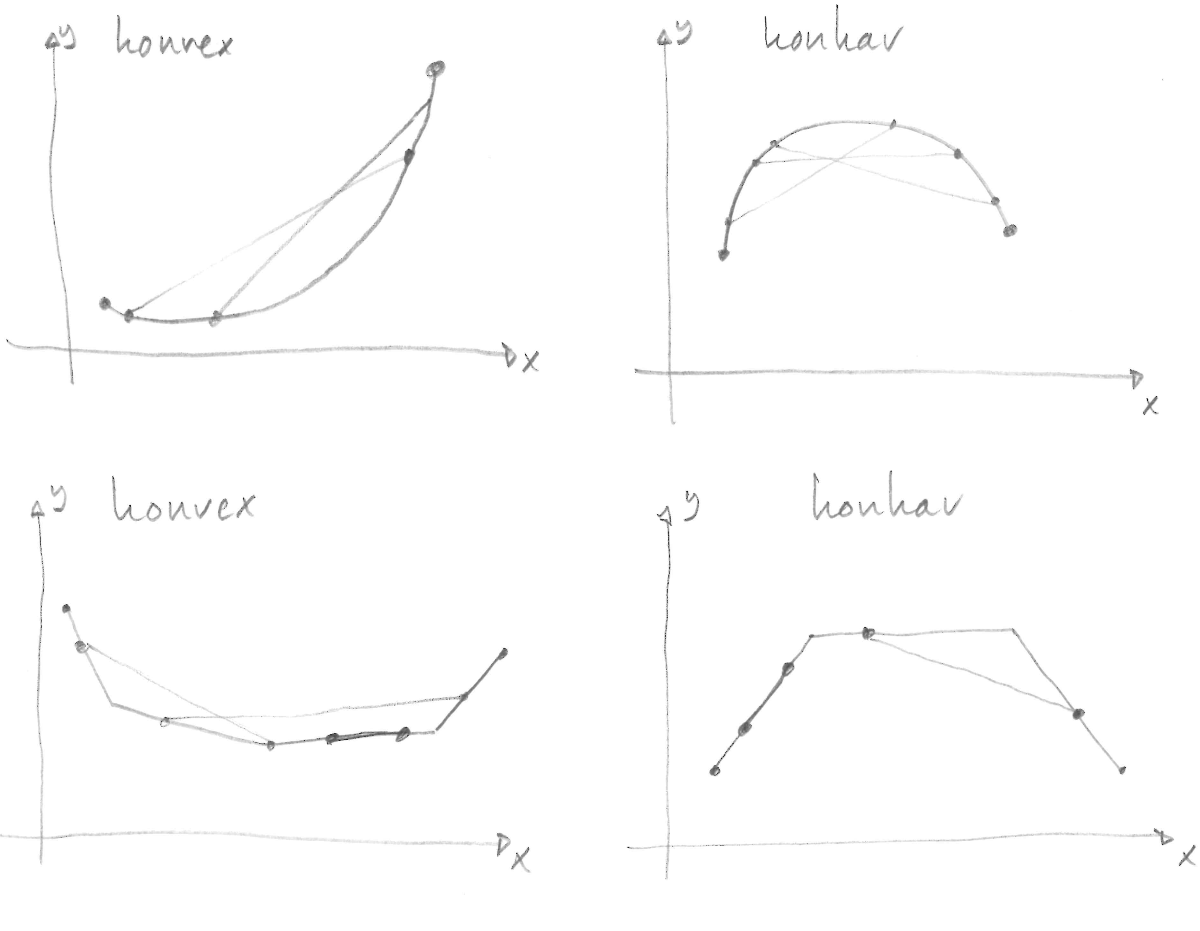
Vi säger att f är

(i) <u>konvex</u> på $[a,b]$ om det $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ gäller att linjestycket mellan $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$ ligger ovanför eller på grafen till f.

(ii) <u>konkav</u> på $[a,b]$ om det $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ gäller att linjestycket mellan $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$ ligger under eller på grafen till f.

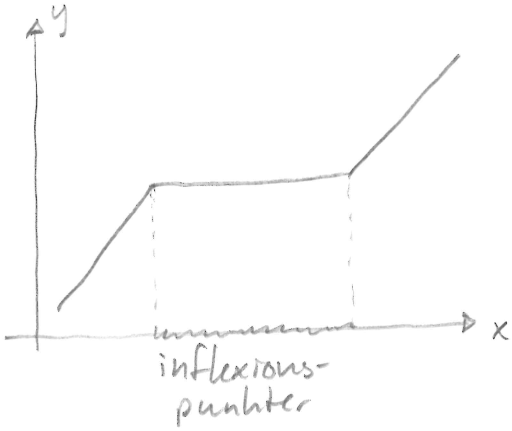
Anmärkning: I boken får linjestycket inte ligga på grafen. Bokens definition är det som brukar kallas strängt konvex/konkav.

Exempel:



Definition: Om $x_0 \in D_f$ är sådan att f är konvex på ena sidan om x_0 och konkav på andra sidan kallas x_0 för <u>inflexionspunkt</u>.

Exempel:



Sats: Antag att f är två gånger deriverbar på (a,b). Då gäller att

(i) $f''(x) \geq 0 \;\; \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ är konvex på (a,b).

(ii) $f''(x) \leq 0 \;\; \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ är konkav på (a,b).

(iii) Om x_0 är en inflexionspunkt så är $f''(x_0) = 0$ (men inte omvänt!).

Bevis: Ingår ej.

Exempel: Låt $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+5}$ vara definierad för alla $x \in \mathbb{R}$. Avgör på vilka intervall f är konvex respektive konkav och ange alla inflexionspunkter.

Vi börjar med att derivera f två gånger:

$$f'(x) = D\left[\frac{2x}{x^2+5}\right] = \frac{2\cdot(x^2+5) - 2x\cdot 2x}{(x^2+5)^2} = \frac{10-2x^2}{(x^2+5)^2}$$

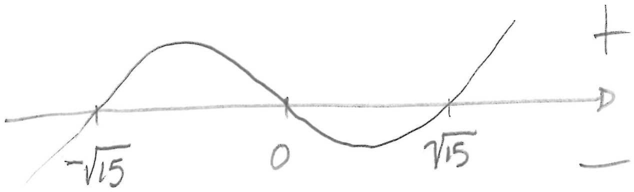
och

$$f''(x) = D\left[\frac{10-2x^2}{(x^2+5)^2}\right] = \frac{-4x(x^2+5)^2 - (10-2x^2)\cdot 2(x^2+5)\cdot 2x}{(x^2+5)^4} =$$

$$= 4x(x^2+5)\cdot\frac{-x^2-5-10+2x^2}{(x^2+5)^4} = 4x\cdot\frac{x^2-15}{(x^2+5)^3}.$$

Vi vill avgöra när $f''(x) \geq 0$ respektive $f''(x) \leq 0$, eftersom satsen då säger var $f(x)$ är konvex respektive konkav, och detta låter oss sedan bestämma inflexionspunkterna.

Vi gör en förenklad teckentabell för $f''(x) = \frac{4x(x+\sqrt{15})(x-\sqrt{15})}{(x^2+5)^3}$



Eftersom $f''(x) \geq 0$ då $x \in [-\sqrt{15}, 0]$ samt då $x \in [\sqrt{15}, \infty)$ är f konvex där, och eftersom $f''(x) \leq 0$ då $x \in (-\infty, \sqrt{15}]$ samt då $[0, -\sqrt{15}]$ är f konkav där. Övergång mellan konvexitet och konkavitet sker i $x=0$ samt $x = \pm\sqrt{15}$, så dessa är inflexionspunkter.