Mårten Wadenbäck

Andraderivatatestet, asymptoter

Sats (Andraderivatatestet): Antag att f är två gånger deriverbar på (a,b) och antag att $x_0 \in (a,b)$. Då gäller

(i) Om $f'(x_0)=0$ och $f''(x_0)<0$ så är x_0 en lokal maxpunkt.

(ii) Om $f'(x_0)=0$ och $f''(x_0)>0$ så är x_0 en lokal minpunkt.

Bevis: (i) Visas i boken.

(ii) Per definition gäller $f''(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-\overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)}{h}$.

Eftersom $f''(x_0)>0$ gäller

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f'(x_0+h)}{h}>0 \Rightarrow f'(x_0+h)>0 \text{ för små } h>0$$

och

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f'(x_0+h)}{h}>0 \Rightarrow f'(x_0+h)<0 \text{ för små } h<0.$$

Kring x_0 får vi alltså teckentabellen

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

vilket visar att x_0 är en lokal minpunkt.

Exempel: Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ med $D_f = \mathbb{R}$.

Derivering ger $f'(x) = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,

så $f'(x)=0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. För att avgöra karaktären av dessa kritiska punkter använder vi andraderivatatestet. Andraderivatan är

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= -\frac{2x(1+x^2)((1+x^2)+2(1-x^2))}{(1+x^2)^4} =$$

$$= -\frac{2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}.$$

Eftersom $f'(-1)=0$ och $f''(-1) = \frac{1}{2} > 0$ är $x=-1$ en lokal minpunkt, och eftersom $f'(1)=0$ och $f''(1) = -\frac{1}{2} < 0$ är $x=1$ en lokal maxpunkt.

Anmärkning: Om $f''(x_0)=0$ går det inte att använda satsen för att dra några slutsatser!

Exempel: Funktionen $f(x) = x^4 = (x^2)^2 \geq 0$ har ett lokalt minimum i $x=0$, och $g(x) = x^3$ har en terrasspunkt i $x=0$.

Eftersom $f'(x) = 4x^3$ och $f''(x) = 12x^2$ gäller att $f'(0)=0$ och $f''(0)=0$. För $g(x)$ gäller $g'(x)=3x^2$ och $g''(x)=6x$, så även för $g(x)$ har vi $g'(0)=0$ och $g''(0)=0$. Att första- och andraderivatorna är noll avgör alltså inte punktens karaktär.

Ibland uppför sig en funktion på ett sätt så att den liknar en rät linje. En linje som funktionen "närmar sig" kallas för en asymptot, och dessa kan vara till hjälp för att skissa funktionen (eller vissa andra undersökningar). Det finns två typer.

Definition: Kurvan $y=f(x)$ sägs ha en lodrät asymptot $x=a$ om $f(x)\to+\infty$ eller $f(x)\to-\infty$ då $x\to a^+$ eller $x\to a^-$.

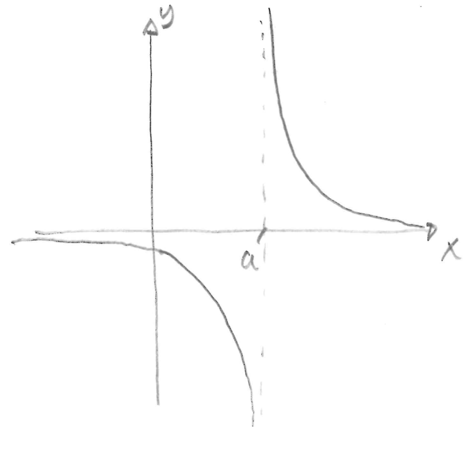
Absolut vanligaste orsaken till en lodrät asymptot är att vi delar med en faktor som går mot noll, men det i sig garanterar inte en asymptot, och det finns andra anledningar till att en lodrät asymptot uppstår.

Exempel: Funktionen $f(x)=\frac{1}{x-a}$ uppfyller

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-}\frac{1}{x-a} = -\infty \quad \text{och}$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+}\frac{1}{x-a} = +\infty,$$

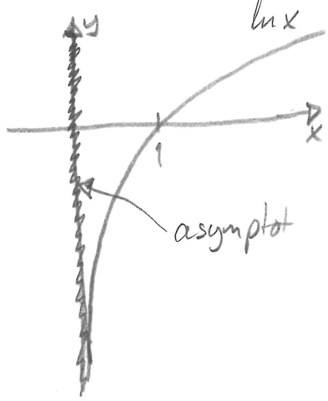
så $f(x)$ har en lodrät asymptot $x=a$.



Exempel: Eftersom

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \begin{bmatrix} x = \frac{1}{e^t} \\ t\to +\infty \end{bmatrix} = \lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{e^t}\right) = \lim_{t\to+\infty} \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln(e^t) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} -t\cdot \underbrace{\ln e}_{=1} = -\infty$$



har $f(x) = \ln x$ en lodrät asymptot $x=0$.

Den andra typen av asymptoter är <u>sneda</u>.

Definition: Linjen $y=kx+m$ sägs vara <u>sned asymptot</u> till $f(x)$ då $x\to+\infty$ om $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(kx+m)=0$.

På samma sätt kallas $y=kx+m$ <u>sned asymptot</u> till $f(x)$ då $x\to-\infty$ om $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(kx+m)=0$.

Anmärkning: Ibland talas det om <u>vågräta/horisontella asymptoter</u>. Dessa ingår som specialfall bland de sneda, om vi tar $k=0$.

Exempel: Bestäm alla asymptoter och rita kurvan till funktionen $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$.

Vi gör den vanliga undersökningen med teckentabell osv.

Kritiska punkter: Derivering ger

$$f'(x) = \frac{2x(1-x^2)-x^2\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2},$$

så $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Randpunkter: Saknas, men eftersom

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}-1} = -1$$

och på samma sätt $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$ har $f(x)$ en sned (vågrät) asymptot $y=-1$ då $x\to\pm\infty$.

Singulära punkter: Saknas, eftersom funktionen är deriverbar på hela sin definitionsmängd.

Funktionen är inte definierad då $x=\pm 1$, och där är nämnaren noll, så det kan finnas asymptoter där.

Beräkning av gränsvärdena

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2}{\underbrace{(1-x)}_{>0}\underbrace{(1+x)}_{<0}} = \text{"}\frac{1}{0^-}\text{"} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2}{\underbrace{(1-x)}_{>0}\underbrace{(1+x)}_{>0}} = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = +\infty$$

visar att $x=-1$ är en lodrät asymptot.

På samma sätt ger

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{\underbrace{(1-x)}_{>0}\underbrace{(1+x)}_{>0}} = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2}{\underbrace{(1-x)}_{<0}\underbrace{(1+x)}_{>0}} = \text{"}\frac{1}{0^-}\text{"} = -\infty$$

att $x=1$ är en lodrät asymptot.

Teckentabellen blir

x	$(-\infty)$		-1^-	-1^+		0		1^-	1^+		$(+\infty)$
$f'(x)$		$-$	$(-\infty)$	$(-\infty)$	$-$	0	$+$	$(+\infty)$	$(+\infty)$	$+$	
$f(x)$	(-1)	↘	$(-\infty)$	$(+\infty)$	↘	0	↗	$(+\infty)$	$(-\infty)$	↗	(-1)

lok. min.

Så grafen ser ut: