

Beräkning av sneda asymptoter

Sats: Om f är en rationell funktion, dvs $f(x) = \frac{T(x)}{N(x)}$ där $T(x)$ och $N(x)$ är polynom, så har $f(x)$ en sned asymptot då $x \rightarrow \pm\infty$ då $\text{grad } T \leq 1 + \text{grad } N$.

Asymptoten ges då av $y = q(x)$, där $q(x)$ är kvotpolynomet.

Beris: Enligt divisionsalgoritmen finns entydigt bestämda polynom $q(x)$ och $r(x)$ så att

$$T(x) = q(x)N(x) + r(x) \quad \text{med} \quad \text{grad } r < \text{grad } N.$$

För att $y = q(x)$ skall kunna vara en asymptot måste $\text{grad } q \leq 1$, och då blir (om $q(x) \neq 0$)

$$\begin{aligned} \text{grad } T &= \text{grad}(q(x)N(x) + r(x)) = \text{grad}(q(x)N(x)) = \\ &= \text{grad } q + \text{grad } N \leq 1 + \text{grad } N. \end{aligned}$$

Om $y = q(x)$ gäller

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - q(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x) + \frac{r(x)}{N(x)} - q(x) = 0,$$

så om $\text{grad } q \leq 1$ är $y = q(x)$ en asymptot.

Anmärkning: Om $f(x)$ är en rationell funktion är detta ofta den bästa metoden att beräkna sneda asymptoter på.

(2.)

Exempel: Bestäm alla asymptoter till $f(x) = \frac{x^4 + x^3 - 6x^2}{x^3 - 3x^2 + 2x}$.

Eftersom täljarens grad är fyra och nämnarens grad är tre kommer det finnas en sned asymptot.

Polynomdivision ger

$$\begin{array}{r} \overset{= x+4}{\overline{)} x^4+x^3-6x^2} \\ \underline{-(x^4-3x^3+2x^2)} \\ 4x^3-8x^2 \\ \underline{-(4x^3-12x^2+8x)} \\ 4x^2-8x \end{array}$$

så $f(x) = x+4 + \frac{4x^2-8x}{x^3-3x^2+2x}$. Eftersom

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (x+4) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2-8x}{x^3-3x^2+2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(\frac{4}{x} - \frac{8}{x^2})}{x^3(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2})} = 0 \end{aligned}$$

är $y=x+4$ asymptot då $x \rightarrow \pm\infty$ (precis enligt satsen).

Finns lodräta asymptoter? Enda möjligheterna för

dessa är då $x^3-3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x=0$ eller $x^2-3x+2=0$,

dvs $x=0$, $x=1$, eller $x=2$. Vi undersöker f då x går

mot dessa värden, och utnyttjar att

$$f(x) = x+4 + \frac{4x^2-8x}{x^3-3x^2+2x} = x+4 + \frac{4x(x-2)}{x(x-1)(x-2)} = x+4 + \frac{4}{x-1}$$

för alla andra x . Detta ger

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x+4 + \frac{4}{x-1} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 4 + \frac{4}{x-1} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 4 + \underbrace{\frac{4}{x-1}}_{<0} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 4 + \underbrace{\frac{4}{x-1}}_{>0} = +\infty,$$

} asymptot $x=1$
finns!

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 4 + \frac{4}{x-1} = 10, \text{ och}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 4 + \frac{4}{x-1} = 10.$$

Trots att nämnaren blir noll då $x=0$, $x=1$, och $x=2$ är det bara $x=1$ som är lodrät asymptot.

Sammanfattningsvis ges alla asymptoterna av $y=x+4$ och $x=1$.

Det går att bestämma asymptoter även till funktionser som inte är rationella funktionser. För att klara detta behövs ofta följande jämförelseresultat:

Sats: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{e^{qx}} = 0$ om $q > 0$

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^q} = 0$ om $q > 0$.

Beris: Ingår inte!

Satsen säger, slarvigt uttryckt, att exponentielfunktioner växer snabbare än alla polynom, som i sin tur växer snabbare än alla logaritmer (och potenser av logaritmer).

Exempel: Med hjälp av jämförelseresultatet får vi för varje heltal $h > 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^h e^x = \left[\begin{array}{l} t = -x \\ t \rightarrow +\infty \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-t)^h e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^h t^h}{e^t} = 0.$$

För att undersöka om en funktion $f(x)$ har en sned asymptot då $x \rightarrow +\infty$ tänker vi som följer (fallet $x \rightarrow -\infty$ fungerar på samma sätt)

Om $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (hx + m) = 0$ måste även

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{hx}{x} - \frac{m}{x} = 0 \Leftrightarrow h = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Därefter måste $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - hx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{f(x) - hx - m}_{\rightarrow 0} + m = m.$

Vi får följande metod:

Steg 1: Beräkna $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Existerar detta gränsvärde blir det asymptotens h -värde. Saknas gränsvärdet finns ingen asymptot då $x \rightarrow +\infty$, och det är inte lönt att fortsätta med steg 2.

Steg 2: Beräkna $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - hx$ med värdet på h från steg 1. Existerar gränsvärdet så finns asymptoten $y = hx + m$ då $x \rightarrow +\infty$, och i annat fall finns den ej.

Exempel: Bestäm eventuella sneda asymptoter till $f(x) = \ln x$.

Eftersom $x > 0$ är det bara meningsfullt att betrakta $x \rightarrow +\infty$.

Steg 1: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (enligt jämförelseresultatet),

så $h = 0$.

(5.)

Steg 2: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 0x = +\infty$, så gränsvärdet existerar inte, och alltså finns ingen asymptot då $x \rightarrow +\infty$.

Det finns alltså inga sneda asymptoter till $f(x) = \ln x$!

Exempel: Bestäm alla asymptoter till $f(x) = \frac{3xe^x + x - e^x - 1}{e^x + 1}$.

Eftersom nämnaren är $e^x + 1 > 1$ saknas lodräta asymptoter.

Finns någon sned asymptot då $x \rightarrow +\infty$?

$$\begin{aligned} \text{Steg 1: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xe^x + x - e^x - 1}{xe^x + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x(3 + \frac{1}{e^x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{xe^x})}{xe^x(1 + \frac{1}{e^x})} = 3, \end{aligned}$$

så $k_1 = 3$.

$$\begin{aligned} \text{Steg 2: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - k_1 x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xe^x + x - e^x - 1}{e^x + 1} - 3x = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xe^x + x - e^x - 1 - 3xe^x - 3x}{e^x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(-\frac{2x}{e^x} - 1 - \frac{1}{e^x})}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = -1, \end{aligned}$$

så $m_1 = -1$.

Då $x \rightarrow +\infty$ finns alltså asymptoten $y = 3x - 1$.

Finns någon sned asymptot då $x \rightarrow -\infty$?

$$\begin{aligned} \text{Steg 1: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3xe^x + x - e^x - 1}{xe^x + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(3e^x + 1 - \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x})}{x(e^x + 1)} = 1, \end{aligned}$$

så $k_2 = 1$.

(6.)

$$\begin{aligned}
 \text{Steg 2: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - h_2 x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3xe^x + x - e^x - 1}{e^x + 1} - x = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3xe^x + x - e^x - 1 - xe^x - x}{e^x + 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overset{\rightarrow 0}{2xe^x} - \overset{\rightarrow 0}{e^x} - 1}{\underset{\rightarrow 0}{e^x} + 1} = -1,
 \end{aligned}$$

så $m_2 = -1$.

Då $x \rightarrow -\infty$ finns alltså asymptoten $y = x - 1$.

Sammanfattningsvis har $f(x)$ två asymptoter; $y = 3x - 1$ då $x \rightarrow +\infty$ och $y = x - 1$ då $x \rightarrow -\infty$.