Sannolikhet och statistik I

Johan Jonasson

Mars 2020

Några inledande småsaker:

Några inledande småsaker:

- Titta regelbundet på hemsidan i Canvas.

Några inledande småsaker:

- Titta regelbundet på hemsidan i Canvas.
- Det finns en detaljerad lista med lärandemål på hemsidan.

Några inledande småsaker:

- Titta regelbundet på hemsidan i Canvas.
- Det finns en detaljerad lista med lärandemål på hemsidan.
- Tidigare år har TM jobbat på egen hand med ett Matlabhäfte. Det gäller inte längre, men häftet finns på hemsidan och innehåller en del saker som är av värde för framtiden för både TM och Kf.

Finns slump?

Finns slump? Ja, i kvantvärlden tycks det vara så, men det vi betraktar som slump är oftast i huvudsak mest osäkerhet; skeenden som är för komplexa för att man ska kunna ha kontroll över dem, men som i princip kan vara deterministiska.

Finns slump? Ja, i kvantvärlden tycks det vara så, men det vi betraktar som slump är oftast i huvudsak mest osäkerhet; skeenden som är för komplexa för att man ska kunna ha kontroll över dem, men som i princip kan vara deterministiska.

Exempel.

- Hur kommer ett tärningsslag att utfalla? I princip förutsägbart, men i praktiken oförutsägbart.

Finns slump? Ja, i kvantvärlden tycks det vara så, men det vi betraktar som slump är oftast i huvudsak mest osäkerhet; skeenden som är för komplexa för att man ska kunna ha kontroll över dem, men som i princip kan vara deterministiska.

Exempel.

- Hur kommer ett tärningsslag att utfalla? I princip förutsägbart, men i praktiken oförutsägbart.
- Hur kommer svenska folket att rösta i valet 2022?

Finns slump? Ja, i kvantvärlden tycks det vara så, men det vi betraktar som slump är oftast i huvudsak mest osäkerhet; skeenden som är för komplexa för att man ska kunna ha kontroll över dem, men som i princip kan vara deterministiska.

Exempel.

- Hur kommer ett tärningsslag att utfalla? I princip förutsägbart, men i praktiken oförutsägbart.
- Hur kommer svenska folket att rösta i valet 2022?
- Finns liv på andra planeter?

Finns slump? Ja, i kvantvärlden tycks det vara så, men det vi betraktar som slump är oftast i huvudsak mest osäkerhet; skeenden som är för komplexa för att man ska kunna ha kontroll över dem, men som i princip kan vara deterministiska.

Exempel.

- Hur kommer ett tärningsslag att utfalla? I princip förutsägbart, men i praktiken oförutsägbart.
- Hur kommer svenska folket att rösta i valet 2022?
- Finns liv på andra planeter?
- Dog farao Tutankhamon av en genetisk sjukdom?

Finns slump? Ja, i kvantvärlden tycks det vara så, men det vi betraktar som slump är oftast i huvudsak mest osäkerhet; skeenden som är för komplexa för att man ska kunna ha kontroll över dem, men som i princip kan vara deterministiska.

Exempel.

- Hur kommer ett tärningsslag att utfalla? I princip förutsägbart, men i praktiken oförutsägbart.
- Hur kommer svenska folket att rösta i valet 2022?
- Finns liv på andra planeter?
- Dog farao Tutankhamon av en genetisk sjukdom?
- Härstammar fåglar från dinosaurier?

Vad är sannolikhet?

Vad är sannolikhet?

Förslag: Vad relativa frekvensen konvergerar mot.

Vad är sannolikhet?

Förslag: Vad relativa frekvensen konvergerar mot. Till exempel, singla slant n gånger.

Vad är sannolikhet?

Förslag: Vad relativa frekvensen konvergerar mot. Till exempel, singla slant n gånger. Låt X_n vara antalet gånger du får klave.

Vad är sannolikhet?

Förslag: Vad relativa frekvensen konvergerar mot. Till exempel, singla slant n gånger. Låt X_n vara antalet gånger du får klave. Rimligt att anse att sannolikheten att få klave vid kast med detta mynt är

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}.$$

Vad är sannolikhet?

Förslag: Vad relativa frekvensen konvergerar mot. Till exempel, singla slant n gånger. Låt X_n vara antalet gånger du får klave. Rimligt att anse att sannolikheten att få klave vid kast med detta mynt är

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}.$$

Två problem:

Vad är sannolikhet?

Förslag: Vad relativa frekvensen konvergerar mot. Till exempel, singla slant n gånger. Låt X_n vara antalet gånger du får klave. Rimligt att anse att sannolikheten att få klave vid kast med detta mynt är

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}.$$

Två problem:

- Existerar gränsvärdet?

Vad är sannolikhet?

Förslag: Vad relativa frekvensen konvergerar mot. Till exempel, singla slant n gånger. Låt X_n vara antalet gånger du får klave. Rimligt att anse att sannolikheten att få klave vid kast med detta mynt är

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}.$$

Två problem:

- Existerar gränsvärdet?
- Kräver upprepbarhet.

En del slumpfenomen är inte ens i princip upprepbara, men vi vill ändå använda sannolikhetsteori på dem.

En del slumpfenomen är inte ens i princip upprepbara, men vi vill ändå använda sannolikhetsteori på dem. Några exempel.

- Vad är sannolikheten att Barcelona slår Chelsea i morgon?

En del slumpfenomen är inte ens i princip upprepbara, men vi vill ändå använda sannolikhetsteori på dem. Några exempel.

- Vad är sannolikheten att Barcelona slår Chelsea i morgon?
- Vad är sannolikheten att det regnar på fredag?

En del slumpfenomen är inte ens i princip upprepbara, men vi vill ändå använda sannolikhetsteori på dem. Några exempel.

- Vad är sannolikheten att Barcelona slår Chelsea i morgon?
- Vad är sannolikheten att det regnar på fredag?
- Vad är sannolikheten den här ultraljudsbilden visar en cancertumör?

En del slumpfenomen är inte ens i princip upprepbara, men vi vill ändå använda sannolikhetsteori på dem. Några exempel.

- Vad är sannolikheten att Barcelona slår Chelsea i morgon?
- Vad är sannolikheten att det regnar på fredag?
- Vad är sannolikheten den här ultraljudsbilden visar en cancertumör?

Då är sannolikhet snarare en grad av tro, som man vill sätta siffror på.

En del slumpfenomen är inte ens i princip upprepbara, men vi vill ändå använda sannolikhetsteori på dem. Några exempel.

- Vad är sannolikheten att Barcelona slår Chelsea i morgon?
- Vad är sannolikheten att det regnar på fredag?
- Vad är sannolikheten den här ultraljudsbilden visar en cancertumör?

Då är sannolikhet snarare en grad av tro, som man vill sätta siffror på. Den kan uppdateras av ny information, t.ex. det regnar idag".

En del slumpfenomen är inte ens i princip upprepbara, men vi vill ändå använda sannolikhetsteori på dem. Några exempel.

- Vad är sannolikheten att Barcelona slår Chelsea i morgon?
- Vad är sannolikheten att det regnar på fredag?
- Vad är sannolikheten den här ultraljudsbilden visar en cancertumör?

Då är sannolikhet snarare en grad av tro, som man vill sätta siffror på. Den kan uppdateras av ny information, t.ex. det regnar idag". Viktigt inom AI!

Sannolikhetsteorin *säger inget* om vad sannolikhet är, bara hur den måste uppföra sig.

Sannolikhetsteorin *säger inget* om vad sannolikhet är, bara hur den måste uppföra sig.

Man utgår alltid från en modell, precis som i annan matematik.

Sannolikhetsteorin *säger inget* om vad sannolikhet är, bara hur den måste uppföra sig.

Man utgår alltid från en modell, precis som i annan matematik. Modellen har man goda skäl att tro på eller intressera sig för (sannolikhetsteori)

Sannolikhetsteorin *säger inget* om vad sannolikhet är, bara hur den måste uppföra sig.

Man utgår alltid från en modell, precis som i annan matematik. Modellen har man goda skäl att tro på eller intressera sig för (sannolikhetsteori) eller vill testa (statistikteori).

Sannolikhetsteorin *säger inget* om vad sannolikhet är, bara hur den måste uppföra sig.

Man utgår alltid från en modell, precis som i annan matematik. Modellen har man goda skäl att tro på eller intressera sig för (sannolikhetsteori) eller vill testa (statistikteori).

Sannolikhetsteori

Sannolikhetsteorin *säger inget* om vad sannolikhet är, bara hur den måste uppföra sig.

Man utgår alltid från en modell, precis som i annan matematik. Modellen har man goda skäl att tro på eller intressera sig för (sannolikhetsteori) eller vill testa (statistikteori).

Sannolikhetsteori

Ett försök vars utfall beror på slumpen kallas för ett *slumpförsök*.

Sannolikhetsteorin *säger inget* om vad sannolikhet är, bara hur den måste uppföra sig.

Man utgår alltid från en modell, precis som i annan matematik. Modellen har man goda skäl att tro på eller intressera sig för (sannolikhetsteori) eller vill testa (statistikteori).

Sannolikhetsteori

Ett försök vars utfall beror på slumpen kallas för ett *slumpförsök*.

Mängden S av alla möjliga utfall, u, kallas för försökets *utfallsrum*.

Sannolikhetsteorin *säger inget* om vad sannolikhet är, bara hur den måste uppföra sig.

Man utgår alltid från en modell, precis som i annan matematik. Modellen har man goda skäl att tro på eller intressera sig för (sannolikhetsteori) eller vill testa (statistikteori).

Sannolikhetsteori

Ett försök vars utfall beror på slumpen kallas för ett *slumpförsök*.

Mängden S av alla möjliga utfall, u, kallas för försökets *utfallsrum*. Mer bildligt: Om vårt slumpförsök är ett lotteri, så är S tunnan med alla lotter.

Exempel. Singla slant.

Exempel. Singla slant. De möjliga utfallen är krona och klave.

Exempel. Singla slant. De möjliga utfallen är krona och klave. Boken skriver T och H för tails och heads.

Exempel. Singla slant. De möjliga utfallen är krona och klave. Boken skriver T och H för tails och heads. Med de beteckningarna får vi

$$S = \{H, T\}.$$

Exempel. Singla slant. De möjliga utfallen är krona och klave. Boken skriver T och H för tails och heads. Med de beteckningarna får vi

$$S = \{H, T\}.$$

Exempel. Välj ett tal på måfå mellan 0 och 1.

Exempel. Singla slant. De möjliga utfallen är krona och klave. Boken skriver T och H för tails och heads. Med de beteckningarna får vi

$$S = \{H, T\}.$$

Exempel. Välj ett tal på måfå mellan 0 och 1.

$$S = [0, 1].$$

Exempel. Singla slant. De möjliga utfallen är krona och klave. Boken skriver T och H för tails och heads. Med de beteckningarna får vi

$$S = \{H, T\}.$$

Exempel. Välj ett tal på måfå mellan 0 och 1.

$$S = [0, 1].$$

Exempel. Hur länge håller LED-lampan?

Exempel. Singla slant. De möjliga utfallen är krona och klave. Boken skriver T och H för tails och heads. Med de beteckningarna får vi

$$S = \{H, T\}.$$

Exempel. Välj ett tal på måfå mellan 0 och 1.

$$S = [0, 1].$$

Exempel. Hur länge håller LED-lampan?

$$S = [0, \infty).$$

Definition: En delmängd A till S kallas för en *händelse*.

Definition: En delmängd A till S kallas för en *händelse*.

Exempel. Betrakta ett tärningskast. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Definition: En delmängd A till S kallas för en *händelse*.

Exempel. Betrakta ett tärningskast. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $A = \{1, 3, 5\} = \{u \in S : u \text{ udda}\} = \{\text{udda utfall}\}$.

Definition: En delmängd A till S kallas för en *händelse*.

Exempel. Betrakta ett tärningskast. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $A = \{1, 3, 5\} = \{u \in S : u \text{ udda}\} = \{\text{udda utfall}\}$.
- $B = \{1, 2\} = \{u \in S : u \leq 2\} = \{\text{vi får högst en tvåa}\}$.

Om slumpförsöket får ett utfall $u \in A$, säger vi att "A inträffar".

Definition: En delmängd A till S kallas för en *händelse*.

Exempel. Betrakta ett tärningskast. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $A = \{1, 3, 5\} = \{u \in S : u \text{ udda}\} = \{\text{udda utfall}\}$.
- $B = \{1, 2\} = \{u \in S : u \leq 2\} = \{\text{vi får högst en tvåa}\}$.

Om slumpförsöket får ett utfall $u \in A$, säger vi att "A inträffar".

Att säga att $A \cup B$ inträffar är då samma sak som att säga att A eller B inträffar,

Definition: En delmängd A till S kallas för en *händelse*.

Exempel. Betrakta ett tärningskast. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $A = \{1, 3, 5\} = \{u \in S : u \text{ udda}\} = \{\text{udda utfall}\}$.
- $B = \{1, 2\} = \{u \in S : u \leq 2\} = \{\text{vi får högst en tvåa}\}$.

Om slumpförsöket får ett utfall $u \in A$, säger vi att "A inträffar".

Att säga att $A \cup B$ inträffar är då samma sak som att säga att A eller B inträffar, att säga att $A \cap B$ inträffar är samma sak som att säga att både A och B inträffar

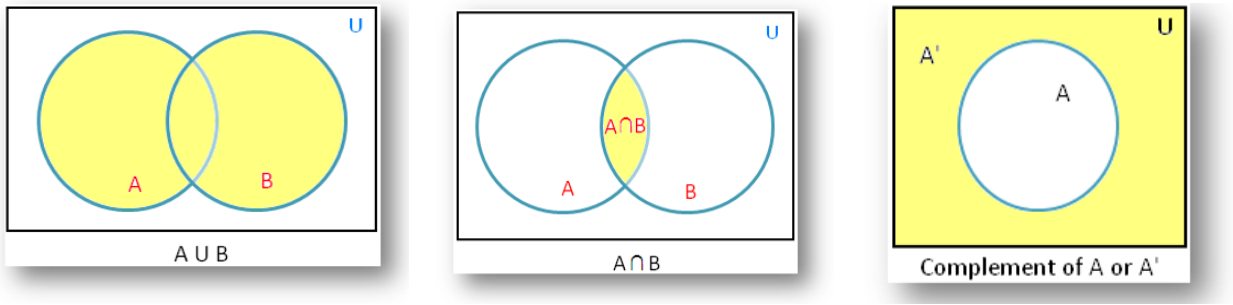
Definition: En delmängd A till S kallas för en *händelse*.

Exempel. Betrakta ett tärningskast. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $A = \{1, 3, 5\} = \{u \in S : u \text{ udda}\} = \{\text{udda utfall}\}$.
- $B = \{1, 2\} = \{u \in S : u \leq 2\} = \{\text{vi får högst en tvåa}\}$.

Om slumpförsöket får ett utfall $u \in A$, säger vi att "A inträffar".

Att säga att $A \cup B$ inträffar är då samma sak som att säga att A eller B inträffar, att säga att $A \cap B$ inträffar är samma sak som att säga att både A och B inträffar och att säga att A^c inträffar är samma sak som att säga att A inte inträffar.



Figur: Mängdoperationer

Sannolikhetsmått

Sannolikhetsmått

Man skriver $\mathcal{P}(S)$ för mängden av alla delmängder till S.

Sannolikhetsmått

Man skriver $\mathcal{P}(S)$ för mängden av alla delmängder till S.

Definition: Om $\mathbb{P} : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ uppfyller

(i) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ för alla A,

Sannolikhetsmått

Man skriver $\mathcal{P}(S)$ för mängden av alla delmängder till S.

Definition: Om $\mathbb{P} : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ uppfyller

(i) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ för alla A,

(ii) $\mathbb{P}(S) = 1$,

Sannolikhetsmått

Man skriver $\mathcal{P}(S)$ för mängden av alla delmängder till S.

Definition: Om $\mathbb{P} : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ uppfyller

(i) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ för alla A,

(ii) $\mathbb{P}(S) = 1$,

(iii) $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ för alla följder av parvis disjunkta mängder $A_1, A_2, \ldots$ (dvs sådana att $A_i \cap A_j = 0$ då $i \neq j$),

Sannolikhetsmått

Man skriver $\mathcal{P}(S)$ för mängden av alla delmängder till S.

Definition: Om $\mathbb{P} : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ uppfyller

(i) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ för alla A,

(ii) $\mathbb{P}(S) = 1$,

(iii) $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ för alla följder av parvis disjunkta mängder $A_1, A_2, \ldots$ (dvs sådana att $A_i \cap A_j = 0$ då $i \neq j$),

kallas $\mathbb{P}$ för ett *sannolikhetsmått*.

Sannolikhetsmått

Man skriver $\mathcal{P}(S)$ för mängden av alla delmängder till S.

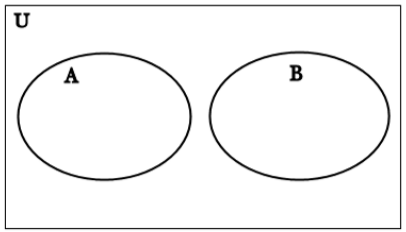
Definition: Om $\mathbb{P} : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ uppfyller

(i) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ för alla A,

(ii) $\mathbb{P}(S) = 1$,

(iii) $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ för alla följder av parvis disjunkta mängder $A_1, A_2, \ldots$ (dvs sådana att $A_i \cap A_j = 0$ då $i \neq j$),

kallas $\mathbb{P}$ för ett *sannolikhetsmått*.



Figur: Disjunkta mängder.

Tag $A_1 = S$ och $A_2 = A_3 = \ldots = \emptyset$ i (iii) och få $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \ldots$, vilket ger

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Tag $A_1 = S$ och $A_2 = A_3 = \ldots = \emptyset$ i (iii) och få $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \ldots$, vilket ger

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Proposition 3.1: För alla händelser A och B gäller att

(a) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$,

(b) $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$,

(c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$,

(d) $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Bevis:

Bevis:

(a) Eftersom A och A^c är disjunkta och $A \cup A^c = S$ gäller enligt (ii) och (iii) att $1 = \mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$.

Bevis:

(a) Eftersom A och A^c är disjunkta och $A \cup A^c = S$ gäller enligt (ii) och (iii) att $1 = \mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$.

(b) Enligt (iii) gäller
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((B \setminus A) \cup (A \cap B)) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$.

Bevis:

(a) Eftersom A och A^c är disjunkta och $A \cup A^c = S$ gäller enligt (ii) och (iii) att $1 = \mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$.

(b) Enligt (iii) gäller
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((B \setminus A) \cup (A \cap B)) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$.

(c) Enligt (iii) och sedan (b) gäller

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Bevis:

(a) Eftersom A och A^c är disjunkta och $A \cup A^c = S$ gäller enligt (ii) och (iii) att $1 = \mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$.

(b) Enligt (iii) gäller
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((B \setminus A) \cup (A \cap B)) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$.

(c) Enligt (iii) och sedan (b) gäller

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

(d) Om $A \subseteq B$ gäller $A \cap B = A$, så (b)
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(A)$ enligt (i).

Exempel. Risken för regn på lördag är 50%, risken för regn på söndag är 40%. Risken för regn båda dagarna är 30%. Vad är chansen till uppehåll hela helgen?

Exempel. Risken för regn på lördag är 50%, risken för regn på söndag är 40%. Risken för regn båda dagarna är 30%. Vad är chansen till uppehåll hela helgen?

Vad är S?

Exempel. Risken för regn på lördag är 50%, risken för regn på söndag är 40%. Risken för regn båda dagarna är 30%. Vad är chansen till uppehåll hela helgen?

Vad är S? Inte så noga faktiskt och vi behöver inte ens specificera, men vi kan till exempel säga $S =$ {(regn,regn),(regn,uppehåll),(uppehåll,regn),(uppehåll,uppehåll)}.

Exempel. Risken för regn på lördag är 50%, risken för regn på söndag är 40%. Risken för regn båda dagarna är 30%. Vad är chansen till uppehåll hela helgen?

Vad är S? Inte så noga faktiskt och vi behöver inte ens specificera, men vi kan till exempel säga $S =$ {(regn,regn),(regn,uppehåll),(uppehåll,regn),(uppehåll,uppehåll)}.

Låt

$$A = \{\text{regn på lördag}\}.$$

$$B = \{\text{regn på söndag}\}.$$

Exempel. Risken för regn på lördag är 50%, risken för regn på söndag är 40%. Risken för regn båda dagarna är 30%. Vad är chansen till uppehåll hela helgen?

Vad är S? Inte så noga faktiskt och vi behöver inte ens specificera, men vi kan till exempel säga $S =$ {(regn,regn),(regn,uppehåll),(uppehåll,regn),(uppehåll,uppehåll)}.

Låt

$$A = \{\text{regn på lördag}\}.$$

$$B = \{\text{regn på söndag}\}.$$

Vi söker $\mathbb{P}((A \cup B)^c)$.

Exempel. Risken för regn på lördag är 50%, risken för regn på söndag är 40%. Risken för regn båda dagarna är 30%. Vad är chansen till uppehåll hela helgen?

Vad är S? Inte så noga faktiskt och vi behöver inte ens specificera, men vi kan till exempel säga $S =$ {(regn,regn),(regn,uppehåll),(uppehåll,regn),(uppehåll,uppehåll)}.

Låt

$$A = \{\text{regn på lördag}\}.$$
$$B = \{\text{regn på söndag}\}.$$

Vi söker $\mathbb{P}((A \cup B)^c)$.

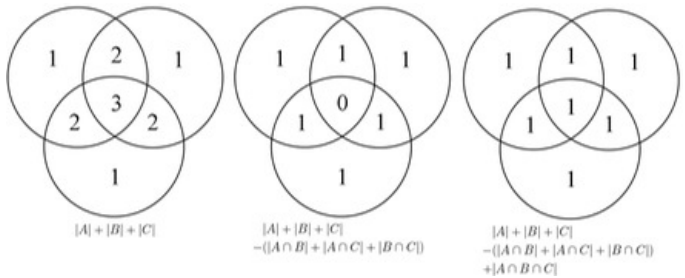
$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A \cup B)^c) &= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) \\ &= 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) \\ &= 1 - (0.5 + 0.4 - 0.3) = 0.4.\end{aligned}$$

För tre händelser A, B och C gäller att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

För tre händelser A, B och C gäller att

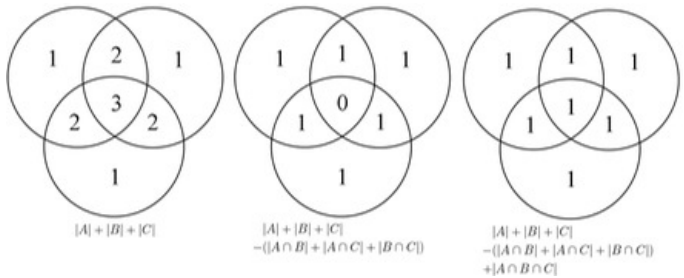
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$



Figur: Inklusion-exklusionsprincipen.

För tre händelser A, B och C gäller att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$



Figur: Inklusion-exklusionsprincipen.

Se gärna på den generella inklusion-exklusionsformel i boken, Proposition 1.5.

Kontinuitet hos sannolikheter

Kontinuitet hos sannolikheter

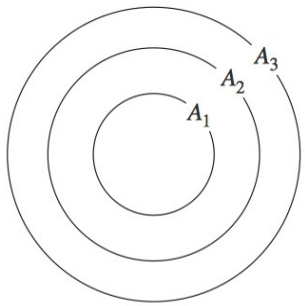
Antag att $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ och skriv $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Kontinuitet hos sannolikheter

Antag att $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ och skriv $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Då gäller enligt (iii) att (om vi låter $A_0 = \emptyset$)

Kontinuitet hos sannolikheter

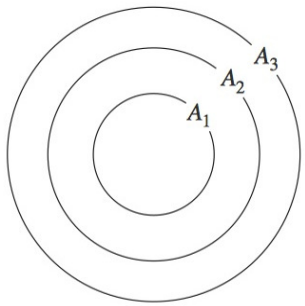
Antag att $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ och skriv $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Då gäller enligt (iii) att (om vi låter $A_0 = \emptyset$)



Figur: Växande följd av händelser.

Kontinuitet hos sannolikheter

Antag att $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ och skriv $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Då gäller enligt (iii) att (om vi låter $A_0 = \emptyset$)



Figur: Växande följd av händelser.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \setminus A_{n-1}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1}) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1}) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(A_N).
\end{aligned}$$

Kortfattat: om $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ och $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ gäller att $\mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(A)$ då $n \to \infty$.

Kortfattat: om $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ och $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ gäller att $\mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(A)$ då $n \to \infty$.

Om istället $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ och $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, gäller enligt det ovanstående att $\mathbb{P}(A_n^c) \to \mathbb{P}(A^c)$ och därmed också att $\mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(A)$ då $n \to \infty$.

Exempel. Välj ett tal på måfå i $[0, 1]$.

Exempel. Välj ett tal på måfå i $[0, 1]$. Detta *betyder* att $S = [0, 1]$ och $\mathbb{P}(A) = \ell(A) =$ längden av A.

Exempel. Välj ett tal på måfå i $[0, 1]$. Detta *betyder* att $S = [0, 1]$ och $\mathbb{P}(A) = \ell(A) =$ längden av A. Detta är ett sannolikhetsmått.

Exempel. Välj ett tal på måfå i $[0, 1]$. Detta *betyder* att $S = [0, 1]$ och $\mathbb{P}(A) = \ell(A) =$ längden av A. Detta är ett sannolikhetsmått. (Vi kan faktiskt inte bevisa det eftersom det kräver en del måtteori att definiera längdmått.)

Exempel. Välj ett tal på måfå i $[0, 1]$. Detta *betyder* att $S = [0, 1]$ och $\mathbb{P}(A) = \ell(A) =$ längden av A. Detta är ett sannolikhetsmått. (Vi kan faktiskt inte bevisa det eftersom det kräver en del måtteori att definiera längdmått.)

Låt till exempel $A_n = [0, 1/2 + 1/n]$.

Exempel. Välj ett tal på måfå i $[0, 1]$. Detta *betyder* att $S = [0, 1]$ och $\mathbb{P}(A) = \ell(A) =$ längden av A. Detta är ett sannolikhetsmått. (Vi kan faktiskt inte bevisa det eftersom det kräver en del måtteori att definiera längdmått.)

Låt till exempel $A_n = [0, 1/2 + 1/n]$. Då är $A = \cap_n A_n = [0, 1/2]$ och $\mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(A)$.

Exempel. Välj ett tal på måfå i $[0,1]$. Detta *betyder* att $S = [0,1]$ och $\mathbb{P}(A) = \ell(A) =$ längden av A. Detta är ett sannolikhetsmått. (Vi kan faktiskt inte bevisa det eftersom det kräver en del måtteori att definiera längdmått.)

Låt till exempel $A_n = [0, 1/2 + 1/n]$. Då är $A = \cap_n A_n = [0, 1/2]$ och $\mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(A)$. (Detta kunde vi kollat direkt i det här fallet eftersom $\ell(A_n) = 1/2 + 1/n$ och $\ell(A) = 1/2$.)