Matematik
Chalmers tekniska högskola 2019-10-12 kl. 08:30-12:30

Tentamen MVE355, Programmering och numeriska beräkningar med Matlab.

Telefonvakt: Mattias Lennartsson ankn 6792, (ansvarig lärare Katarina Blom)
Plats: L
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Betygsgränser: 16-23 p. ger betyget 3, 24-31 p. ger betyget 4 och 32 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 40.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1 (a) Man vill beräkna en approximation till (4p)

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

och har skrivit följande matlabsekvens:

```
f = @(x)exp(-x.^2); n = 5; x = linspace(0,1,n+1); h = 1/n;
q1 = sum(h*f(x(1:n+1))); q2 = sum(h*f(x(2:n+1)));
q3 = sum(h*f(x(1:n))); q4 = (q2+q1)/2;
```

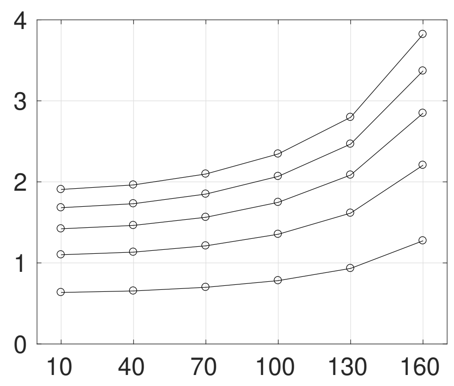
Har man använt trapetsmetoden då man beräknar $q4$ i kodsekvensen ovan? Gäller det att $q2 > q3$? Motivera svaren.

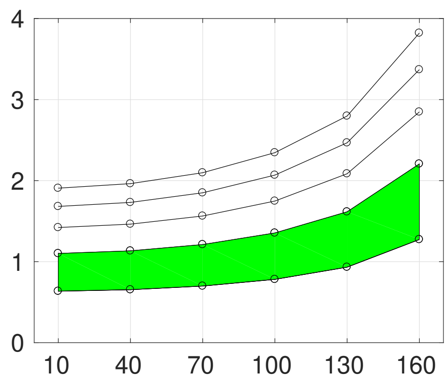
(b) Periodlängden $T(\theta_0)$ för en viss pendel med längden ℓ ges av formeln (4p)

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2)\sin^2(\theta)}}\, d\theta$$

där $g = 9.81$ och θ_0 är begynnelseutslaget (i radianer). Skriv en funktion (en `function`) i Matlab som beräknar periodlängden för en sådan här pendel. Låt funktionen ha två parametrar, begynnelseutslaget och pendelns längd. Använd Matlab's kommando `integral` för att beräkna integralen.

(c) I figuren till vänster nedan har man ritat periodlängderna för 5 pendlar med längderna $0.1, 0.3 \ldots, 0.9$. Man har använt begynnelseutslagen, $10^o, 40^o, \ldots, 160^o$. Skriv en sekvens i Matlab som beräknar alla periodlängder och ritar en liknande figur. Använd funktionen du skrev i b-uppgiften i din lösning (även om du inte löst b-uppgiften). (4p)





(d) I figuren till höger ovan har man använt kommandot `fill` och fyllt i området mellan de två nedersta kurvorna med grön färg. Skriv en sekvens i Matlab som ritar en liknande figur. (2p)

(a) q2 är höger rektangelregel, q3 är vänster, så (q2+q3)/2 blir trapetsmetoden. (dvs svaret på frågan är nej). e^{-x^2} avtar på intervallet [0,1], därför blir q3>q2, dvs påståendet är falskt.

(b)
```
function T=periodlgd(v,l)
  k=4*sqrt(l/9.81);
  f=@(t)1./sqrt(1-sin(v/2).^2*sin(t).^2);
  T=k*integral(f,0,pi/2);
```

(c)
```
v=(10:30:160);
l=0.1:0.2:1;
for i = 1:numel(l)
  for j = 1:numel(v)
    T(i,j)=periodlgd(v(j)*pi/180,l(i));
  end
  plot(v,T(i,:),'k-o');hold on
end
axis([0 170 0 4]); grid on
```

(d)
```
% T och v från sekvensen ovan
fill([v v(end:-1:1)],[T(2,:) T(1,end:-1:1)],'green');
plot(v,T(1,:),'ko-');plot(v,T(2,:),'ko-');
```

---

2 (a) Formulera Newton's metod för beräkning av nollställen till en funktion $f(x) = 0$. (3p)

(b) Funktionen (3p)

$$f(x) = 0.5(x-2)^2 - 2\cos(2x) - 1.5$$

har ett nollställe nära $x = 1$. Skriv en sekvens i Matlab som bestämmer nollstället med 5 korrekta decimaler. Använd Newton's metod.

(c) Skriv en sekvens i Matlab som ritar grafen för funktionen i (b)-uppgiften på intervallet $-3 \leq x \leq 7$. Rita i samma figur tangenten till funktionen i nollstället nära 1 (som beräknades i b-uppgiften). (4p)

Ledning: Den räta linjen $y = L(x)$ där

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

är tangenten till funktionen $f(x)$ i punkten $x = a$.

(d) Ändra (eller skriv om) programmet du skrev i c-uppgiften. Låt en användare markera var tangenten ska ritas genom att klicka på grafen med vänster musknapp. Användaren ska kunna markera flera tangenter i figuren, och avsluta inmatningen genom att högerklicka. (4p)

(a) Se litteraturen.

(b)
```
f=@(x)0.5*(x-2).^2-2*cos(2*x)-1.5;
df=@(x)(x-2)+4*sin(2*x);
x=1;
kmax=10; tol=0.5e-5;
for k = 1:kmax
    h=-f(x)/df(x);
    x=x+h;
    if abs(h)<tol, break, end
end
disp(x)
```

(c)
```
% f och df från uppgift (b)
x=linspace(-3,7);
plot(x,f(x)); hold on
L=@(x,a)f(a)+df(a)*(x-a)
xk=linspace(0.5,1.5);
plot(xk,L(xk,1));
```
(d)
```
% f, df och L från uppgift (c)
x=linspace(-3,7);
plot(x,f(x)); hold on
while 1
  [a,junk,kn]=ginput(1);
  if kn == 3, break, end;
  xk=linspace(a-0.5,a+0.5);
  plot(xk,L(xk,a));
end
```

---

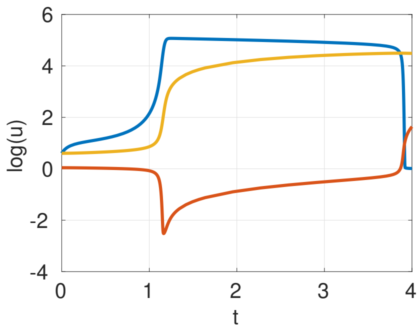
3 En viss kemisk reaktion beskrivs av följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} u_1'(t) = s(u_2(t) - u_1(t)u_2(t) + u_1(t) - qu_1(t)^2) \\ u_2'(t) = \frac{1}{s}(u_3(t) - u_2(t) - u_1(t)u_2(t)) \\ u_3'(t) = w(u_1(t) - u_3(t)) \\ u_1(0) = 4, u_2(0) = 1.1, u_3(0) = 4 \end{cases}$$

där u_1, u_2 och u_3 är koncentrationer av tre kemiska substanser, $s = 77.27$, $q = 8.375 \cdot 10^{-6}$ och $w = 0.1610$. I figuren nedan har man beräknat och ritat lösningen till problement. (I figuren har man ritat logaritmen av u.)

(a) Skriv en matlabsekvens som beräknar och ritar ut lösningen enligt figuren nedan. Använd `ode45`. (4p)

(b) Lösningskurvorna för $u_1(t)$ och $u_2(t)$ har en skärningspunkt nära $t = 4$. Berätta (eller skriv i Matlab) hur man kan ange skärningspunkten lite mer exakt. Utgå från dina beräkningar i (a). (2p)



(a)
```
[t,U]=ode15s(@kemi,[0,4],[4;1.1;4]);
plot(t,log10(U),'linewidth',3);
grid on;
xlabel('t');ylabel('log(u)')
```
funktionen `kemi`
```
function [u]=kemi(t,u)
 s=77.27; q=8.375e-6; w=0.1610;
 u=[s*(u(2)-u(1)*u(2)+u(1)-q*u(1)^2)
    1/s*(u(3)-u(2)-u(1)*u(2))
    w*(u(1)-u(3))];
```

(b) I Matlab:

```
p=min(find(U(:,1)<U(:,2)));
svar=t(p)
```

---

4 Man vill lösa ett linjärt ekvationssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

(a) Matrisen $\boldsymbol{A}$ har man bildat med hjälp av `spdiags` enligt följande: (3p)

```
n = 50; e = ones(n,1)*10;
A = spdiags([e -5*e e],[-5 0 5],n,n);
A(10:10:n,1) = 50;
```

Hur ser matrisen `A` ut?

(b) Låt `b = rand(n,1);`. Skriv en matlabsekvens som beräknar en lösning till ekvationssystemet och som skriver ut det minsta x-värdet. (3p)

(a) Elementen på huvuddiagonalen är -50, elementen på diagonal -5, resp diagonal 5 har värdet 10. Elementen på rad 10, 20, .. 50 i kol 1 har värdet 50. Alla andra elem är 0.

(b)
```
b=rand(n,1);
svar=min(A\b)
```
