Matematik
Chalmers tekniska högskola 2019-08-30 kl. 08:30-12:30

Tentamen MVE355, Programmering och numeriska beräkningar med Matlab.

Ansvarig: Katarina Blom , tel 772 10 97.
Telefonvakt under tentan: Katarina Blom, ankn 1097 Plats: L
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Betygsgränser: 16-23 p. ger betyget 3, 24-31 p. ger betyget 4 och 32 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 40.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

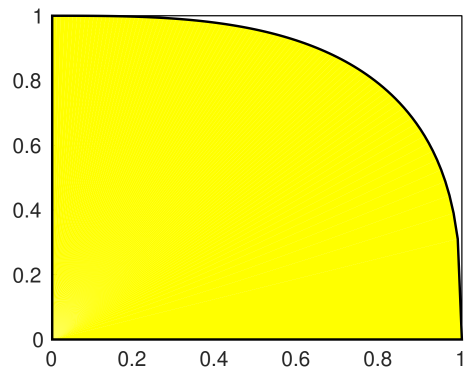
1 Om man vill beräkna en approximation till integralen

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^3}dx$$

kan man som bekant approximera arean som innesluts av

$$f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$$

och x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq 1$. I figuren till höger har man ritat funktionen och markerat arean med gult.



(a) Ett sätt att approximera arean är att slumpa fram punkter (x, y) på intervallet $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ och beräkna hur många som hamnar i det gula området. En approximation till arean ges då av antalet punkter i det gula området delat med totalt antal framslumpade punkter. Skriv ett program i Matlab som approximerar arean genom att slumpa fram 100 000 punkter. (4p)

(b) Ett betydligt bättre sätt att beräkna integralen ovan är att använda trapetsmetoden. Formulera trapetsmetoden för beräkning av integraler. (3p)

(c) Beräkna ett värde på integralen. Använd trapetsmetoden med steglängden 0.5. Räkna för hand och redovisa beräkningarna. (Ledning: $\sqrt[3]{1-1/2^3} \approx 0.9565$). (4p)

(a)
```
f=@(x)(1-x.^3).^(1/3);
antal = 0; n = 100000;
for i = 1:n
  x = rand; y = rand;
  if f(x)>y
    antal = antal+1;
  end
end
svar = antal/n;
```

(b) Se litteraturen.

(c) Medelvärdet av vänster och höger rektangelregel: $(q_v + q_h)/2$ där $q_v = 0.5 \cdot (f(0) + f(0.5))$ och $q_h = 0.5 \cdot (f(0.5) + f(1))$.

$$(q_v + q_h)/2 = (0.5 \cdot (1 + 0.9565) + 0.5 \cdot 0.9656)/2 = (0.5 + 0.9565)/2 \approx 0.7283$$

2 (a) Funktionen $f(x) = x^2 - \cos(x)$ har två nollställen nära $x = -1$ respektive $x = 1$. Skriv en matlabsekvens som bestämmer bägge nollställena med 5 korrekta decimaler. Använd Newton's metod. (5p)

(b) Förklara varför det inte är lämpligt att använda startvärdet $x_0 = 0$ i (a)-uppgiften. (2p)

(a)

```
f = @(x)x.^2-cos(x);
df = @(x)2*x + sin(x);
for x0 = [-1,1]
  x = x0;
  for k=1:10
    h = -f(x)/df(x);
    x = x+h;
    if abs(h)<0.5e-5
      break;
    end
  end
  disp(x);
end
```

(b) $f'(0) = 0$, så första gången raden `h = -f(x)/df(x);` körs får man division med 0 och ingen konvergens mot något av nollställena.

---

3 Låt

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = u_2(t) + t^2 \\ u_1(0) = -1/3, u_2(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Skriv ett program i Matlab som löser begynnelsevärdesproblemet. Använd `ode45` och låt programmet skriva ut värden på $u_1(0.4)$ och $u_2(0.5)$. Bara dessa två värden, inga andra värden ska skrivas ut. (4p)

(b) Man vet att $u_1(t)$ är växande och har exakt ett nollställe på intervallet $0 \leq t \leq 0.5$. Skriv en matlabsekvens som bestämmer ungefär var detta nollställe är. (4p)

(a)

```
f=@(t,u)[u(2);u(2)+t.^2]
[t,U] = ode45(f,[0,0.4],[-1/3;1]);
disp(U(end,1));
[t,U] = ode45(f,[0,0.5],[-1/3;1]);
disp(U(end,2))
```

(b) Eftersom vi inte känner funktionen annat än i de uträknade punkterna kan vi inte använda `fzero`. Ett sätt man kan använda är att leta efter teckenväxlingen i första kolumnen i `U` från lösningen till (a).

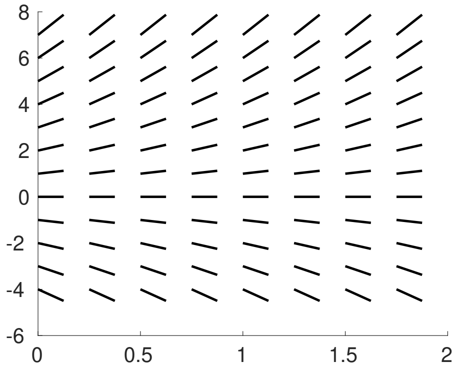
```
[minu, p] = min(abs(U(:,1)));
```

Korrensponderande t-värde ges av

```
tmin = t(p);
```

(vektorn `t` från programmet i (a)).

4 I figuren ser vi 12×8 små linjer. Linjerna har olika lutning. Linjerna på den översta raden har lutning 7, de på raden under har lutning 6 osv. Linjerna på raden längst ner har lutning -4. Skriv ett program i Matlab som ritar figuren. Rita linjerna med `plot`. (6p)



```
t = 0:0.25:1.75;
y = -4:7;
figure(1);clf;hold on
dt=(t(2)-t(1))/2;
for i = t
  for j = y
    plot([i i+dt],[j j+dt*j],'k-');
  end
end
```

---

5 (a) Man har använt följande sekvens för att lösa ett linjärt ekvationssystem med fyra obektanta, x_1, x_2, x_3, x_4. (3p)

```
>> rref([A b])
ans =
  1    0    0    1    0
  0    1    0    1    0
  0    0    1    1    0
  0    0    0    0    0
```

`A` är systemets koefficientmatris och `b` är högerledet. Vilka lösningar har ekvationssystemet?

(b) En Redheffermatris är en $m \times n$ matris $\boldsymbol{A}$ där elementen $a_{ij} = 1$ om i delar j eller om $j = 1$. Alla andra element är 0. Följande matriser är Redheffermatriser (5p)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skriv en funktion `redh(m,n)` som har två heltal som argument och som returnerar en $m \times n$ Redheffermatris. De två anropen

```
A = redh(3,2);
B = redh(4,4);
```

ska t.ex. skapa matriserna $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ ovan.

(a) Variabeln x_4 är fri, låt $x_4 = t \in \mathbb{R}$

$$x_1 = -t, x_2 = -t, x_3 = -t, x_4 = t$$

(b)
```
function A = redh(m,n)
  A = zeros(m,n);
  for i = 1:m
    for j = 1:n
      if mod(j,i)==0 | j==1
        A(i,j) = 1;
      end
    end
  end
```
