MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Datum: 30 maj 2020 kl. 14.00 - 18.00
Telefonvakt: Vilhelm Adolfsson
ankn 5307, 031-7725307

MVE545, Matematisk Analys, del2, Dl1/El1

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från dugga 2020 räknas med, men maximal poäng på denna del är 38 och bonuspoäng kan bara användas för att få godkänt. För betyg 4 krävs 33 poäng, varav minst 4 poäng på andra delen av tentan. För betyg 5 krävs 43 poäng sammanlagt, varav minst 6 poäng på andra delen av tentan. Redovisa dina lösningar tydligt så att tankegångarna blir lätta att följa.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad nedan. (14p)

2. Beräkna **a)** $\int x(4x^2+3)\,dx$, **b)** $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$, **c)** $\int x^2 \ln x\,dx$, **d)** $\int \frac{2x}{x^2+x-2}\,dx$, (7p)
e) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$, **f)** $\int \cos x(\sin x + \cos x)\,dx$.

3. Betrakta ODE:n $y'' - 2y' + y = f(x)$ och lös ekvationen i fallen: a) $f(x) = x$, (5p)
b) $f(x) = e^{-x}$, c) $f(x) = e^x$, d) $f(x) = xe^x$.

4. Beräkna $\int \frac{x^3 - x^2 + 3x}{x^2 - x + 2}\,dx$. (4p)

5. Lös om möjligt, för differentialekvationen $y' = -\frac{2x}{1+x^2}y + \frac{x}{x^2+1}$ begynnelsevärdesproblemen (BVP) där: **a)** $y(0) = 1$, **b)** $y(0) = 0$. (4p)

6. Beräkna för $x > 0$, $\frac{d}{dx}\left(\int_x^{x^2} (\ln t)^2\,dt\right)$. (4p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Redovisa dina lösningar tydligt så att tankegångarna blir lätta att följa.

7. Lös $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y' - y = x$. (3p)

8. I en elektrisk krets är kopplat i serie en strömkälla med en spänning $V(t) = \frac{25}{4}te^{-t}$, en strömbrytare, en resistans om R Ohm, en induktans (spole) om L Henry och en kapacitans om C Farad. Spänningsfallet vid tiden t över resistansen är RI vid en ström $I = I(t)$ i kretsen, spänningsfallet över induktansen är $L\frac{dI}{dt}(t)$ och över kapacitansen $\dfrac{Q}{C}$ där $Q = Q(t)$ är laddningen över kapacitansen vid tiden t. Antag att $R = 20$, $L = 4$, $C = 1/9$ och V som ovan, i respektive SI-enheter, och antag dessutom begynnelsevillkoret $Q(0) = 0$, $I(0) = 0$. Använd att $I = \dfrac{dQ}{dt}$ och Kirchoffs spänningslag för kretsen för att härleda en ODE som bestämmer laddningen $Q(t)$ i kapacitansen vid tiden $t > 0$. Lös denna ODE och bestäm $\lim_{t\to\infty} Q(t)$. (3p)

9. Lös $y'' + 2y' + y = e^{-x} \arctan x$. (3p)

10. (3p)

(a) Antag att $f \in C([a, b])$, dvs antag att f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$. Gäller det då eller inte, att det finns en funktion $F(x)$ sådan att $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$? Motivera också ditt svar utförligt.

(b) Ge om möjligt, eller bevisa att det inte är möjligt, ett exempel på att integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ existerar men $f \notin C([a, b])$.

(c) Är det alltid så att för alla funktioner f på intervallet $[a, b]$ så existerar $\int_a^b f(x)\,dx$? Bevisa ditt påstående.

VA

Del 1: Godkäntdelen, Uppgift 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges.

(a) Beräkna integralen $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Vilka, om någon, av följande är linjära ODE: **i)** $y''' - (\sin y)x = x$, **ii)** $y''' + (\tan x)y^2 = xy''$, **iii)** $\ln x(y' + 1)^2 = 1$, **iv)** $(\ln x)y'' + y = 1$. Motivera ditt svar noga. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 x \, dx$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Teckna den ändliga arean i första kvadranten (alltså punkter (x, y) där $x > 0,\ y > 0$) mellan graferna till $x^2 + y^2 = 4$ respektive $y = 1/x$. Du behöver bara skriva upp ett uttryck för arean med hjälp av en integral, men du behöver inte beräkna integralen/arean. (2p)

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(e) Beräkna integralen $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos x + \sin x) \frac{x^2 + 2x}{x + 2} \, dx$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(f) Lös differentialekvationen $y^2 y' = x^2 y^2$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(g) Är integralen $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^3 + x}} e^{-x} \, dx$ konvergent och/eller divergent? Motivera ditt svar utförligt. (2p)

Lösning:

Svar: ....