

Tentamen MVE255

Matematiska vetenskaper, Chalmers tekniska högskola.

Datum:	–
Examinator:	Axel Flinth
Hjälpmedel:	Alla.
Betygsgränser:	20 poäng för betyget 3. 30 poäng för betyget 4 40 poäng för betyget 5.

Det finns totalt 50 poäng att samlas.

Beräkningar och motiveringar skall redovisas. **Enbart svar ger inga poäng.**

Tentamen består av **åtta (8)** uppgifter. Tesen består av **fyra (4)** blad.

Lycka till!

ÖVNINGSTENTA

Uppgift 1 (5p)

- (a) Skriv MATLAB-kod för att plotta funktionen $f(x, y) = x \sin(y)$ på området $[1, 3] \times [2, 4]$. (3p)
- (b) Beskriv också hur man kan plotta den på cirkelskivan $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. *I fönstret skall alltså endast punkterna $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = f(x, y)\}$ synas, och inga andra.* (2p)

Uppgift 2 (6p)

Bestäm tangentialplanet till ytan i den angivna punkten.

1. Grafen till funktionen xye^{-x} i punkten $(1, 0, 0)^T$. (3p)
2. Nivåytan $x^2y + z^2 \cos(y) = 1$ i punkten $(1, 0, 1)$. (3p)

Uppgift 3

(6p)

Beräkna integralen

(a)

$$\iint_T x^2 dA(x, y),$$

där T är triangeln med hörnen $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$. (2p)

(b)

$$\iiint_L dV,$$

där L är den delen av cylindern $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0\}$ som ligger under planet $x + y + z = 2$. (2p)

(c)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \|\mathbf{r}\| e^{-\|\mathbf{r}\|^3} dA.$$

(2p)

Uppgift 4

(6p)

Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en deriverbar funktion. Den är konstant på två rätta linjer ℓ_1, ℓ_2 i planet. ℓ_1 och ℓ_2 är ortogonala. Låt $p \in \mathbb{R}$ vara skärningspunkten mellan ℓ_1 och ℓ_2 . Se figuren.

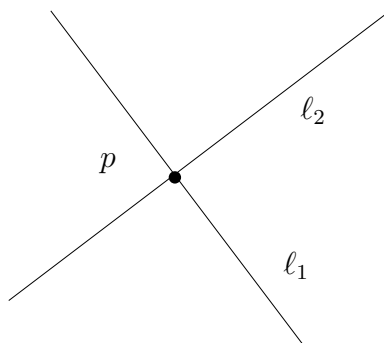


Figure 1: Funktionen f i Uppgift 4 är konstant på linjerna ℓ_1 och ℓ_2 . Linjerna skär varandra i punkten p .

(a) Motivera att f är kontinuerlig i p . (2p)

(b) Låt v_1 respektive v_2 vara linjernas riktningsvektorer. Beräkna riktningsderivatorna av f i riktningarna v_1 respektive v_2 . (2p)

(c) Visa att $\text{grad} f(p) = 0$ (2p)

Uppgift 5

(8p)

Betrakta

$$f(x, y) = x + y$$

och området $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(a) Motivera att f har ett maximum och minimum på C . (2p)

(b) Bestäm punkterna där maximum respektive minimum inträffar. (6p)

Uppgift 6

(5p)

(a) Beskriv hur man med hjälp av MATLAB kan hitta och klassificera en kritisk punkt till en funktion $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Du kan utgå från att funktionerna `jacobi.m` och `newton.m` från datorövningarna är implementerade, samt att du har en bra initial gissning. (3p)

(b) Nämn ett villkor för en kritisk punkt x_* som är tillräckligt för att Newtonmetoden skall konvergera kvadratisk mot den när den startas nära x_* . Motivera ditt svar. (2p)

Uppgift 7

(8p)

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara ett område med randkurva ∂D och $a : D \rightarrow \mathbb{R}$ och $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ vara deriverbara funktioner. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u) &= f, & \text{i } D \\ -a D_N u &= 0, & \text{på } \partial D \end{cases}.$$

(a) Bestäm den svaga formuleringen för problemet. (3p)

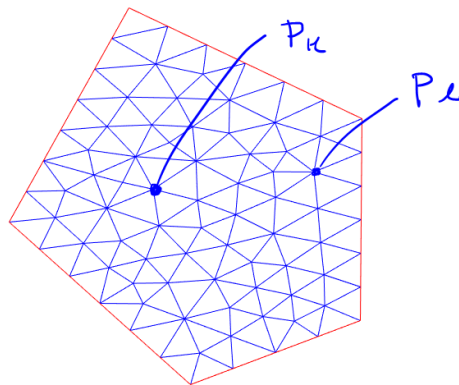
(b) Låt u vara en lösning till randvärdesproblemet. Visa att (3p)

$$\int_D a(x) \langle \nabla u(x), \nabla f(x) \rangle dx \geq 0.$$

(c) Antag att den finita elementmetoden med styckvis linjära basfunktioner används för att lösa randvärdesproblemet. Gittret som används kan beskådas i Figur ?? på nästa sida. Betrakta de två markerade punkterna p_ℓ och p_k . Vad kan sägas om elementet

$$a_{\ell,k}$$

i styvhetsmatrisen? Motivera ditt svar noggrannt. (2p)



Uppgift 8

(6p)

Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{bmatrix} -y^2 e^{-z} \\ x e^{-z} \\ z \end{bmatrix}.$$

(a) Beräkna $\text{div}(\mathbf{v})$. (1p)

(b) Låt H vara halvklotet $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$. Beräkna (1p)

$$\iiint_H \text{div}(\mathbf{v}) dV.$$

Tips: Ett klot med radie 1 har volym $\frac{4\pi}{3}$. Du behöver inte visa detta.

(c) Beräkna flödet av v genom cirkelskivan $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$, där ytelementet antas vara riktat nedåt. (2p)

(d) Låt nu $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ vara den övre halvan av enhetssfären. Använd (a) och (b) för att beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S},$$

där ytelementet antas vara riktad uppåt. (2p)