

Tentamen MVE255

Matematiska vetenskaper, Chalmers tekniska högskola.

Datum:	–
Examinator:	Axel Flinth
Hjälpmedel:	Alla.
Betygsgränser:	20 poäng för betyget 3. 30 poäng för betyget 4 40 poäng för betyget 5.

Det finns totalt 50 poäng att samlas.

Beräkningar och motiveringar skall redovisas. **Enbart svar ger inga poäng.**

Tentamen består av **åtta (8)** uppgifter. Tesen består av **fyra (4)** blad.

Lycka till!

ÖVNINGSTENTA

LÖSNINGSFÖRSLAG

Uppgift 1 (5p)

- (a) Beskriv hur man plottar funktionen $f(x, y) = x \sin(y)$ på området $[1, 3] \times [2, 4]$ med hjälp av MATLAB. (3p)
- (b) Beskriv också hur man kan plotta den på cirkelskivan $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. *I fönstret skall alltså endast punkter i $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = f(x, y)\}$ synas, och inga andra.* (2p)

Lösning. (a): Man börjar med att definiera ett mesh grid.

```
> [x,y]=meshgrid(linspace(1,3),linspace(2,4));
```

Därefter räknar man ut $f(x, y)$ för (x, y) i gittret, och använder antingen `plot3` eller `surf` för att plotta funktionen.

```
> z=x.*sin(y);  
> surf(x,y,z);
```

Här är det viktigt att inte glömma av punktoperatören i multiplikationen.

(b): Här får man börja med att definiera ett mesh grid som man sedan transformerar med hjälp av polärkoordinatsavbildningen.

```
> [r,t] = meshgrid(linspace(0,1), linspace(0,2*pi));  
> x=r.*cos(t);  
> y=r.*sin(t);
```

Därefter fortsätter man som ovan. □

Uppgift 2

(6p)

Bestäm tangentialplanet till ytan i den angivna punkten.

(a) Grafen till funktionen xye^{-x} i punkten $(1, 0, 0)$. (3p)

(b) Nivåytan $x^2y + z^2 \cos(y) = 1$ i punkten $(1, 0, 1)$. (3p)

Lösning. (a) Här använder vi att tangentialplanet till en graf $z = g(x, y)$ vid punkten (x_0, y_0) är grafen till lineariseringen av g vid (x_0, y_0) , dvs.

$$z = g(x_0, y_0) + g'(x_0, y_0) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Vi har $g'(x, y) = [(ye^{-x} - xye^{-x}), xe^{-x}]$. Sätter vi in $(1, 0)$ i formeln (1) får vi alltså

$$z = 1 \cdot 0 \cdot e^{-1} + [0 \cdot e^{-1} - 1 \cdot 0 \cdot e^{-1} \quad 1e^{-1}] \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{bmatrix} = 0 + e^{-1}y.$$

Tangentplanet har alltså ekvationen $z = e^{-1}y$.

(b): Här använder vi att en normalvektor till tangentplanet till en nivåyta för en funktion ϕ vid en punkt p ges av $\text{grad } \phi(p)$. För $\phi(x, y, z) = x^2y + z^2 \cos(y)$ har vi

$$\text{grad } \phi(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 - z^2 \sin(y) \\ 2z \cos(y) \end{bmatrix} \Rightarrow \text{grad } \phi(1, 0, 1) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 \cdot 0 \\ 1^2 - 1^2 \sin(0) \\ 2 \cdot 1 \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Planet har alltså formen

$$\left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v \right\rangle = 0 \right\}$$

för något $\alpha \in \mathbb{R}$. För att beräkna värdet på α utnyttjar vi att $(1, 0, 1)$ tillhör planet:

$$\alpha = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 2.$$

Tangentplanet har alltså ekvationen

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v \right\rangle = 2$$

□

Uppgift 3

(6p)

Beräkna integralen:

(a)

$$\iint_T x^2 dA(x, y),$$

där T är triangeln med hörnen $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$. (2p)

(b)

$$\iiint_L dV,$$

där L är den delen av cylindern $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0\}$ som ligger under planet $x + y + z = 2$. (2p)

(c)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\|v\|} dA(v).$$

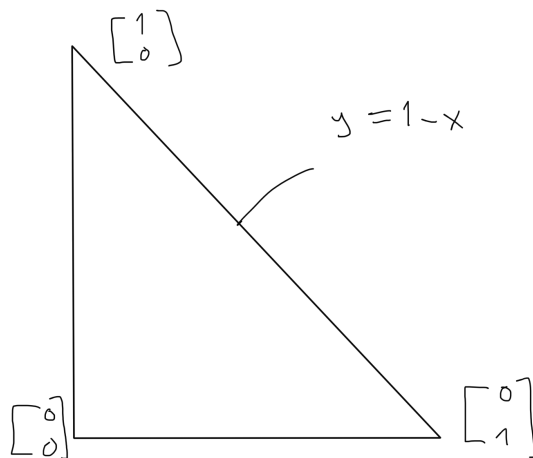
(2p)

Lösning. (a): Triangeln beskrivs av ekvationerna

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x$$

Således ger Fubini

$$\iint_T x^2 dA(x, y) = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 dy dx = \int_0^1 x^2(1-x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$



(b): Vi går över till cylinderkoordinater. I cylinderkoordinater beskrivs L av

$$0 \leq z \leq 2 - r \cos(\theta) - r \sin(\theta), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

När vi går över till cylinderkoordinater får vi inte glömma av funktionaldeterminanten r .

$$\iiint_L 1 dA(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2-r\cos(\theta)-r\sin(\theta)} r dz d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(2 - r \cos(\theta) - r \sin(\theta)) d\theta dr.$$

När vi räknar ut integralen över θ använder vi att integralen över sin respektive cos över en hel period $[0, 2\pi]$ blir noll.

$$\int_0^1 4\pi r dr = \left[\frac{4\pi r^2}{2} \right]_0^1 = 2\pi.$$

(c): Vi går över till polarkoordinater. För att gå över hela $\mathbb{R}^2$ behöver vi låta r gå mellan 0 och ∞ och θ gå mellan 0 och 2π . Funktionaldeterminanten blir r , så att

$$\iint \|v\| e^{-\|v\|^3} dA(v) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r e^{-r^3} \cdot r dr d\theta.$$

Vi löser nu den inre integralen genom att utnyttja att $((r^3)') = 3r^2$

$$\int_0^\infty r^2 e^{-r^3} dr = \left[-\frac{e^{-r^3}}{3} \right]_0^\infty \frac{1}{3}$$

Integralen blir alltså

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3} d\theta = \frac{2\pi}{3}.$$

□

Uppgift 4

(6p)

Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en deriverbar funktion. Den är konstant på två linjer ℓ_1, ℓ_2 i planet. ℓ_1 och ℓ_2 är ortogonala. Låt $p \in \mathbb{R}^2$ vara skärningspunkten mellan ℓ_1 och ℓ_2 . (Se Figur 1).

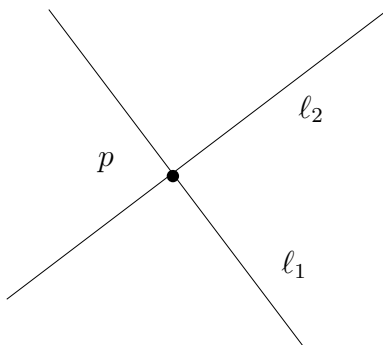


Figure 1: Funktionen f i Uppgift 4 är konstant på linjerna ℓ_1 och ℓ_2 . Linjerna skär varandra i punkten p .

- (a) Motivera att f är kontinuerlig i p . (2p)
- (b) Låt v_1 respektive v_2 vara linjernas riktningsvektorer. Beräkna riktningsderivatorna av f i riktningarna v_1 respektive v_2 . (2p)
- (c) Visa att $\text{grad} f(p) = 0$ (2p)

Lösning. (a): Eftersom f är deriverbar är den även kontinuerlig i p .

(b): Vi beräknar riktningsderivatorna med hjälp av gränsvärdesdefinitionen:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv_i) - f(p)}{t}.$$

Eftersom f är konstant på linjerna så gäller $f(p + tv_i) = f(p)$ för alla t . Gränsvärdena blir alltså

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Båda gränsvärdena blir alltså noll.

(c): Eftersom v_1 och v_2 är ortogonala bildar de en bas för $\mathbb{R}^2$. Eftersom riktningsderivatan i riktning v vidare ges av

$$\langle \text{grad} f(p), v \rangle$$

har vi att $\langle \text{grad} f(p), v_i \rangle = 0$ för v_1 och v_2 . Därur följer $\text{grad} f(p) = 0$.

□

Uppgift 5

(8p)

Betrakta

$$f(x, y) = x + y$$

och området $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(a) Motivera att f har ett maximum och minimum på C . (2p)

(b) Bestäm punkterna där maximum respektive minimum inträffar. (6p)

Lösning. (a): f är kontinuerlig och C är både sluten och begränsad, alltså kompakt. Därur följer genast att f har ett maximum och ett minimum på C .

(b): Vi börjar med att leta efter kritiska punkter i det inre av C . I sådana gäller att $\text{grad } f = 0$. Vi räknar ut

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Det finns alltså inga kritiska punkter i det inre.

För att undersöka kritiska punkter på randen av området, som ges av $\partial C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, använder vi Lagrange kriterium. Om vi definerar $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ lyder det

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{grad } f(x, y) = \lambda \text{grad } g(x, y) = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}.$$

Observera att Lagrange kriterium gäller överallt på ∂C , eftersom $\text{grad } g(x, y) \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ över allt.

Eftersom vidare $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ inte är noll måste $\lambda \neq 0$. Därur följer att $\begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$ måste vara parallell med $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Med andra ord måste $\text{grad } f$'s komponenter vara lika, $2x = 2y$, vilket i sin tur implicerar att $x = y$. Tänker vi på att vi befinner oss på ∂C så följer $1 = x^2 + y^2 = 2x^2$, alltså $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

De kandidaterna för maximi- och minimipunkter på C är alltså

$$\pm \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

. Genom att jämföra funktionsvärden kommer vi fram till att maximum inträffar i $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ och

minimum i $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. □

Uppgift 6

(5p)

- (a) Beskriv hur man med hjälp av MATLAB kan hitta och klassificera en kritisk punkt till en funktion $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Du kan utgå från att funktionerna `jacobi.m` och `newton.m` från datorövningarna är implementerade, samt att du har en bra initial gissning `x0`. (3p)
- (b) Nämn ett villkor för en kritisk punkt x_* som är tillräckligt för att Newtonmetoden skall konvergera kvadratisk mot den när den startas nära x_* . Motivera ditt svar. (2p)

Lösning. (a) Strategin är att med hjälp av Newtonförfarandet hitta ett nollställe till grad g . För att göra detta definierar vi först ett funktionshandtag för g 's gradient

```
> gradg = @(x) jacobi(g,x)';
```

Här är det viktigt att komma ihåg transponatstecknet, annars kommer `newton.m`-koden att få problem att hantera dess output. Nu söker vi nollstället med hjälp av `newton.m`. Vi startar den vid vår gissning `x0`.

```
> x=newton(gradg,x0);
```

(b) Newtonförfarandet konvergerar med kvadratisk hastighet mot ett nollställe x_* för en funktion $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ givet att Jacobimatrisen $\phi'(x_*)$ inte är singulär. För vår användning är $\phi = \text{grad } g$, och således är Jacobimatrisen för ϕ lika med Hessematrisen $(\text{grad } g)'(x_*) = g''(x_*)$ för g . Newtonförfarandet konvergerar alltså med kvadratisk hastighet mot x_* givet att $g''(x_*)$ är ickesingulär. $\square$

Uppgift 7

(8p)

Låt $C \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en cirkel och $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ och $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vara deriverbara funktioner. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u) &= f, & x \in \Omega \\ -a D_N u &= 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}.$$

- (a) Bestäm den svaga formuleringen för problemet. (3p)
- (b) Låt u vara en lösning till randvärdesproblemet. Visa att (3p)

$$\int_{\Omega} a(x) \langle \nabla u(x), \nabla f(x) \rangle dx \geq 0.$$

- (c) Antag att den finita elementmetoden med styckvis linjära basfunktioner används för att lösa randvärdesproblemet. Gittret som används kan beskådas i Figur 2 *på nästa sida*. Betrakta de två markerade punkterna p_ℓ och p_k . Vad kan sägas om elementet

$$a_{\ell,k}$$

i styvhetsmatrisen? Motivera ditt svar noggrannt.

(2p)

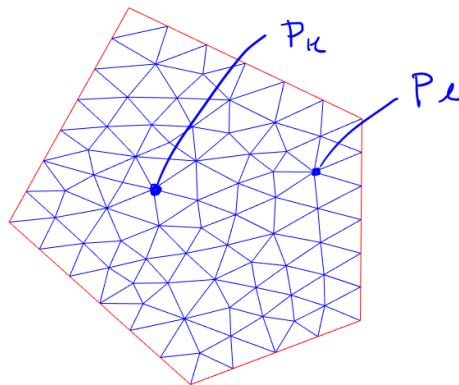


Figure 2: Gittret som används för FEM-lösning av randvärdesproblemet i Uppgift 7. Två trianglar T_ℓ och T_k är markerade.

Lösning. (a): Vi multiplicerar ekvationen $-\nabla \cdot (a \nabla u) = f$ med en godtycklig funktion $v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ och integrerar

$$\int_{\Omega} f(x)v(x)dx = \int_{\Omega} -\nabla \cdot (a \nabla u)v dx.$$

Vi integrerar nu högerledet partiellt.

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot (a(x) \nabla u(x))v(x)dx = - \int_{\partial\Omega} \langle a(x) \nabla u(x), \hat{\mathbf{N}} \rangle v(x) dS + \int_{\Omega} \langle a(x) \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx.$$

Randvillkoret $-a D_N u = 0$ implicerar nu att $\langle a(x) \nabla u(x), \hat{\mathbf{N}} \rangle = 0$. Uttrycket ovan reducerar alltså till $\int_{\Omega} \langle a(x) \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx$.

Den svaga formuleringen blir alltså

$$\int_{\Omega} f(x)v(x)dx = \int_{\Omega} \langle a(x) \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx \text{ för alla } v \in \mathcal{H}^1(\Omega). \quad (2)$$

(b): Eftersom f är deriverbar är f ett element i $\mathcal{H}(\Omega)$. Därför måste (2) gälla för $v = f$. Detta ger

$$\int_{\Omega} \langle a(x) \nabla u(x), \nabla f(x) \rangle dx = \int_{\Omega} f(x)^2 dx \geq 0,$$

där den sista olikheten följer ur att $f^2 \geq 0$.

(c): Om A är problemets operator ges elementen i massmatrisen av

$$a_{\ell k} = \langle A\varphi_{\ell}, \varphi_k \rangle,$$

där ϕ_{ℓ} och ϕ_k är de styckvis linjära funktionerna som är noll överallt förutom i noderna p_{ℓ} respektive p_k . I vårt fall får vi

$$\langle A\varphi_{\ell}, \varphi_k \rangle = \int_{\Omega} \langle a(x) \nabla \phi_{\ell}(x), \nabla \phi_k(x) \rangle dx$$

Eftersom $\nabla \phi_{\ell}$ och $\nabla \phi_k$ aldrig är skiljda från noll samtidigt (detta är uppenbart från skissen) måste alltså ovanstående integral vara noll. $a_{\ell k}$ är alltså lika med noll. $\square$

Uppgift 8

(6p)

Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{bmatrix} -y^2 e^{-z} \\ x e^{-z} \\ z \end{bmatrix}.$$

(a) Beräkna $\text{div}(\mathbf{v})$. (1p)

(b) Låt H vara halvklotet $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$. Beräkna (1p)

$$\iiint_H \text{div}(\mathbf{v}) dV.$$

Tips: Ett klot med radie 1 har volym $\frac{4\pi}{3}$. Du behöver inte visa detta.

(c) Beräkna flödet av $\mathbf{v}$ genom cirkelskivan $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, där ytelementet antas vara riktat nedåt. (2p)

(d) Låt nu $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ vara den övre halvan av enhetssfären. Använd (a) och (b) för att beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S},$$

där ytelementet antas vara riktad uppåt. (2p)

Lösning. (a): Vi beräknar divergensen i cartesiska koordinater

$$\operatorname{div}(v)(x, y, z) = \frac{\partial(-y^2 e^{-z})}{\partial x} + \frac{\partial(x e^{-z})}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 0 + 0 + 1.$$

(b): Vi har

$$\iiint_H \operatorname{div}(v) dV = \iiint_H 1 dV = \operatorname{vol}(H) = \frac{2\pi}{3}.$$

(c): Den nedåtriktade enhetsnormalen till cirkelskivan ges av

$$-\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Detta skulle kunna inses genom en räkning, men det är också geometriskt tämligen klart. Vi måste nu integrera funktionen

$$\langle \widehat{\mathbf{N}}, \mathbf{v}(x, y, z) \rangle = -z$$

över enhetscirkelskivan. Eftersom z -koordinaten är konstant lika med 0 på den blir integralen lika med noll.

(d): Gauss integralsats ger

$$\iiint_H \operatorname{div}(v) dV = \iint_{\partial H} v \cdot d\mathbf{S} = \iint_S v \cdot d\mathbf{S} + \iint_C v \cdot d\mathbf{S}$$

Vi använder nu (b) och (c), alltså att $\iint_C v \cdot d\mathbf{S} = 0$ och $\iiint_H \operatorname{div}(v) dV = \frac{2\pi}{3}$, för att sluta oss till att

$$\iint_S v \cdot d\mathbf{S} = \frac{2\pi}{3}.$$

□