

Tentamen MVE255, Matematisk analys i flera variabler M

Matematiska vetenskaper, Chalmers tekniska högskola.

Datum och tid:	Tisdagen 2 juni 2020, 14.00
Examinator:	Axel Flinth, +46701 757469
Hjälpmedel:	Alla.
Betygsgränser:	20 poäng för betyget 3. 30 poäng för betyget 4 40 poäng för betyget 5.

Det finns totalt 50 poäng att samla.

Beräkningar och motiveringar skall redovisas. **Enbart svar ger inga poäng.**

Tentamen består av **åtta (8)** uppgifter. Tesen består av **fem (5)** blad.

Vid inlämning, glöm inte av försättsbladet.

Lycka till!

Uppgift 1 (5p)

- (a) Skriv MATLAB-kod för att plotta enhetscirkeln $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. (3p)
- (b) Hur kan man i samma MATLAB-plot rita ut enhetstangentvektorn till cirkeln vid punkten $(0, -1)$? Du kan, om du vill, använda dig av funktionen `jacobi.m` från datorövningarna. (2p)

Uppgift 2 (6p)

Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 för funktionen $f(x, y) = xye^{-x}$ i punkten $(0, 0)$.

Uppgift 3

(7p)

Beräkna följande integraler.

(a)

$$\iint_T y \, dA(x, y),$$

där T är triangeln med hörnen $(0, 0)$, $(1, 1)$ och $(1, 0)$. (2p)

(b)

$$\iiint_H y \, dV(x, y, z),$$

där H är halvklotet $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0\}$. (3p)

(c)

$$\iint_S e^{-x-y} dA(x, y)$$

där S är den del av området mellan linjerna $y = x - 1$ och $y = x + 1$ som ligger i halvplanet $\{(x, y) : x \geq 0\}$. (2p)

Uppgift 4

(7p)

Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ vara en inverterbar, symmetrisk matris vars samtliga egenvärden är positiva. Betrakta funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2} x^T A x.$$

(a) Bevisa att

(2p)

$$\text{grad} f(x) = Ax \text{ och } f''(x) = A, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Även du inte lyckas lösa (a) får du använda påståendet för att lösa (b) och (c).

(b) Bestäm och klassificera alla kritiska punkter för f .

(2p)

(c) Låt nu $b \in \mathbb{R}^2$ vara en konstant vektor skild från noll och betrakta linjen

$$\ell = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid b^T x = 1\}.$$

Antag att det restrangerade optimeringsproblemet

$$\min f(x) \text{ under bivillkoret } x \in \ell$$

har en lösning. Visa att denna måste vara lika med

(3p)

$$x_* = \frac{1}{\langle b, A^{-1}b \rangle} A^{-1}b$$

Uppgift 5**(7p)**

Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}.$$

- (a) Beräkna tangentkurvintegralen av $\mathbf{v}$ längs enhetscirkeln, som genomlöps i matematiskt positiv riktning. (3p)
- (b) Är $\mathbf{v}$ ett konservativt vektorfält? (2p)
- (c) Låt nu $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en deriverbar funktion och låt

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \nabla \phi.$$

Vad blir integralen av $\mathbf{w}$ ett varv längs enhetscirkeln? (2p)

Uppgift 6**(6p)**

Låt D vara den del av enhetscirkeln som ligger ovanför grafen till funktionen $y = |x|$. Betrakta integralen

$$\iint_D \sin(x)xy \ln(1 + |xy|) \, dA(x, y).$$

- (a) Skriv MATLAB-kod för att räkna ut integralen utan variabelsubstitution. (3p)
- (b) Transformera integralen till polära koordinater, och skriv MATLAB-kod för att räkna ut den nya integralen. (3p)

Uppgift 7

(7p)

Det endimensionella randvärdesproblemet

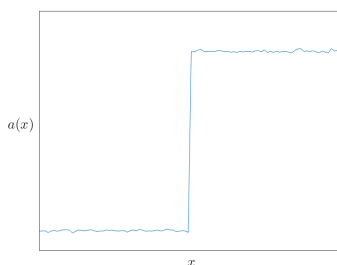
$$\begin{cases} -D(a(x)Du(x)) &= f(x), & x \in (0, L) \\ u(0) &= 0 \\ aDu(L) &= 0 \end{cases}.$$

beskriver temperaturen i en stång som utsätts för en inre källtäthet f . Stången har längden L , varierande värmeledningstäthet a och en oisolerad ände vid $x = 0$.

(a) Vad är den fysikaliska tolkningen av randvillkoret vid $x = L$? (1p)

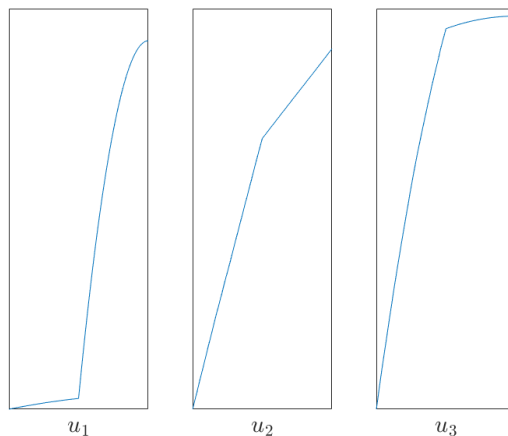
(b) Lös randvärdesproblemet (analytiskt) för fallet att a och f är konstanta. (4p)

(c) Betrakta nu fallet att a är strikt positiv överallt och varierar enligt Figur 1.



Figur 1: Värmeledningskoefficienten a

Om f fortfarande är konstant, vilken av de följande tre funktionerna är då lösningen till randvärdesproblemet? Motivera ditt svar. (2p)



Uppgift 8

(5p)

Låt $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ vara en matris med element a_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$. Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, p \mapsto Ap.$$

(a) Bevisa att

(3p)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

(b) Låt nu K vara enhetskuben $[0, 1]^3$. Beräkna flödesintegralen genom enhetskubens randyta ∂K

$$\iint_{\partial K} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S},$$

där ytelementet antas vara riktat ut ur K .

(2p)