

Tentamen MVE255, Matematisk analys i flera variabler M

Matematiska vetenskaper, Chalmers tekniska högskola.

Datum och tid:	Tisdagen 2 juni 2020, 14.00
Examinator:	Axel Flinth, +46701 757469
Hjälpmedel:	Alla.
Betygsgränser:	20 poäng för betyget 3. 30 poäng för betyget 4 40 poäng för betyget 5.

Det finns totalt 50 poäng att samla.

Beräkningar och motiveringar skall redovisas. **Enbart svar ger inga poäng.**

Tentamen består av **åtta (8)** uppgifter. Tesen består av **fem (5)** blad.

Lycka till!

LÖSNINGSFÖRSLAG

Uppgift 1 (5p)

(a) Skriv MATLAB-kod för att plotta enhetscirkeln $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. (3p)

(b) Hur kan man i samma MATLAB-plot rita ut en tangentvektor till cirkeln vid punkten $(0, -1)$?
Du kan, om du vill, använda dig av funktionen `jacobi.m` från datorövningarna.

(2p)

Bevis. (a) En parametrisering för enhetscirkeln ges av

$$\mathbf{r}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Vi utnyttjar detta för att räkna ut x - och y -koordinater för punkterna på enhetscirkeln. Vi definerar först ett linspace av `theta`-värden, räknar sedan ut vektorer av x och y -värden, och använder till sist `plot` för att plotta cirkeln.

```
> theta=linspace(0,2*pi);  
> x=cos(theta);  
> y=sin(theta);  
> plot(x,y)
```

(b) Vi börjar med att räkna ut en tangentvektor vid punkten $(0, -1)$. Vi kan göra detta med hjälp av vår parametrisering: derivatan av den ges av

$$\mathbf{r}'(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Eftersom vi måste välja $\theta = 3\pi/2$ för få $\mathbf{r}(\theta) = (0, -1)$ blir vår tangentvektor lika med

$$\begin{bmatrix} -\sin(3\pi/2) \\ \cos(3\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi lägger in vektorns värde i MATLAB med

```
> vx=-(-1);
> vy=0;
```

En alternativ väg att beräkna tangentvektorn är att derivera parametriseringen numeriskt. Då behöver vi skapa ett funktionshandtag vi sedan använder `jacobi.m` för att derivera numeriskt i punkten π

```
> r = @(t) [cos(t);sin(t)];
> c = jacobi(r,pi);
> vx=c(1);
> vy=c(2);
```

När vi har räknat ut tangentvektorns komponenter kan vi plotta den med hjälp av `quiver`

```
> hold on;
> quiver(-1,0,vx,vy);
```

Observera: Om man har gjort mindre syntaxfel, t.ex. har glömt av `hold on`, leder detta inte till poängavdrag. □

Uppgift 2

(6p)

Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 för funktionen $f(x, y) = xye^{-x}$ i punkten $(0, 0)$.

Bevis. Vi börjar med att räkna ut gradienten och Hessematrisen för f

$$\text{grad}(f)(x, y) = \begin{bmatrix} ye^{-x} - xye^{-x} \\ xe^{-x} \end{bmatrix}, \quad f''(x, y) = \begin{bmatrix} -2ye^{-x} + xye^{-x} & (1-x)e^{-x} \\ (1-x)e^{-x} & 0 \end{bmatrix}.$$

För att ställa upp Taylorpolynomet behöver vi sätta in punkten i vilken vi vill Taylorutveckla i f , $\text{grad}f$ och f'' .

$$f(0, 0) = 0 \cdot 0 \cdot e^{-0} = 0, \quad \text{grad}f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \cdot e^{-0} - 0 \cdot e^{-0} \\ 0 \cdot e^{-0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f''(0, 0) = \begin{bmatrix} -2 \cdot 0 \cdot e^{-0} + 0 \cdot 0e^{-0} & (1-0)e^{-0} \\ (1-0)e^{-0} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vårt Taylorpolynom blir

$$\begin{aligned} f(0,0) + \left\langle \text{grad} f(0,0), \begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix}, f''(0,0) \begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix} \right\rangle \\ = 0 + \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle = xy \end{aligned}$$

□

Uppgift 3

(7p)

Beräkna följande integraler.

(a)

$$\iint_T y \, dA(x, y),$$

där T är triangeln med hörnen $(0,0)$, $(1,1)$ och $(1,0)$. (2p)

(b)

$$\iiint_H y \, dV(x, y, z),$$

där H är halvklotet $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0\}$. (3p)

(c)

$$\iint_S e^{-x-y} dA(x, y)$$

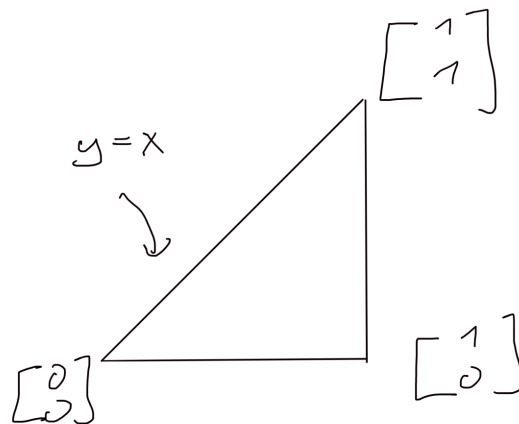
där S är den del av området mellan linjerna $y = x - 1$ och $y = x + 1$ som ligger i halvplanet $\{(x, y) \mid x \geq 0\}$. (2p)

Bevis. (a): Triangeln defineras av de två villkoren $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq x$ (se figur). Fubini ger alltså

$$\iint_T y \, dA(x, y) = \int_0^1 \int_0^x y \, dy dx = \int_0^1 \frac{1}{2} [y^2]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{6} [x^3]_0^1 = \frac{1}{6}$$

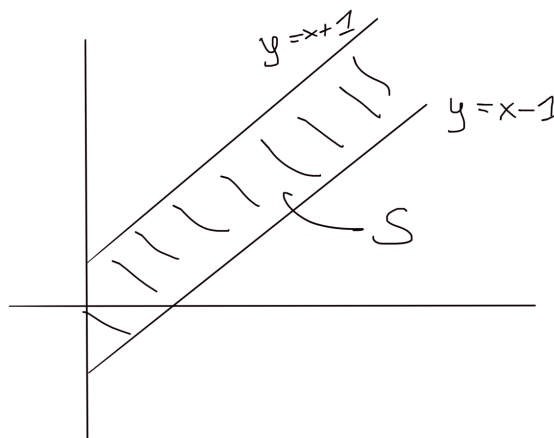
(b): Vi går över till sfäriska koordinater. Halvklotet har radie 1 - detta beskrivs av $0 \leq \rho \leq 1$ i sfäriska koordinater. Vi måste ända från nord- till sydpolen, så $0 \leq \phi \leq \pi$. Vi vill dock bara träffa positiva y -värden - detta betyder att θ -variabeln går från 0 till π . Då funktionaldeterminanten är $\rho^2 \sin(\phi)$, och $y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta)$ blir integralen efter variabelbytet lika med

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^\pi \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \cdot \rho^2 \sin(\phi) \, d\theta d\phi d\rho &= \int_0^1 \int_0^\pi \rho^3 \sin^2(\phi) [-\cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\phi d\rho \\ &= 2 \int_0^1 \rho^3 \cdot \frac{\pi}{2} d\rho = \pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$



Vi använde det välkända faktumet att $\int_0^\pi \sin^2(\phi) d\phi = \frac{\pi}{2}$. Detta kan visas med hjälp av omskrivningen $\sin^2(\phi) = \frac{1 - \cos(2\phi)}{2}$.

(c): Gränserna för integralen är $0 \leq x < \infty$, $x - 1 \leq y \leq x + 1$. Vi kan alltså direkt använda Fubinis sats



$$\begin{aligned}
\iint_S e^{-x-y} \, dA(x, y) &= \int_0^\infty \int_{x-1}^{x+1} e^{-x-y} \, dy \, dx = \int_0^\infty [-e^{-x-y}]_{y=x-1}^{y=x+1} \, dx \\
&= \int_0^\infty -e^{-x-(x+1)} - (-e^{-x-(x-1)}) \, dx = \int_0^\infty e^{1-2x} - e^{-1-2x} \, dx \\
&= \frac{1}{-2} [e^{1-2x} - e^{-1-2x}]_{x=0}^\infty \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{-2} (e^{1-2x} - e^{-1-2x}) \right) + \frac{1}{2} (e^{1-2 \cdot 0} - e^{-1-2 \cdot 0}) = \frac{e - e^{-1}}{2}
\end{aligned}$$

Observera det är viktigt att visa att man har kunskap om att dessa typer av integraler definieras via gränsvärden, och att man noggrant övertygar sig om att dessa gränsvärdet existerar.

En alternativ lösning är att göra variabelbytet $(u, v) = (x, y - x)$. $(x, y) \in S$ precis när $0 \leq u \leq \infty$ och $-1 \leq v \leq 1$. Transformationen är linjär:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

så att

$$du \, dv = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right| dx \, dy = dx \, dy.$$

Eftersom $x + y = (y - x) + 2x = v + 2u$ får blir integralen lika med

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_{-1}^1 e^{-v-2u} \, dv \, du &= \int_0^\infty [-e^{-v-2u}]_{v=-1}^{v=1} \, du = \int_0^\infty -e^{-1-2u} + e^{1-2u} \, du \\
&= \left[\frac{-e^{-1-2u} + e^{1-2u}}{-2} \right]_{u=0}^\infty = \frac{e - e^{-1}}{2},
\end{aligned}$$

där vi likt ovan måste beräkna ett gränsvärde för att bestämma den sista integralen. □

Uppgift 4

(7p)

Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ vara en inverterbar, symmetrisk matris vars samtliga egenvärden är positiva. Betrakta funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle.$$

(a) Bevisa att (2p)

$$\text{grad}f(x) = Ax \text{ och } f''(x) = A, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Även du inte lyckas lösa (a) får du använda påståendet för att lösa (b) och (c).

(b) Bestäm och klassificera alla kritiska punkter för f . (2p)

(c) Låt nu $b \in \mathbb{R}^2$ vara en konstant vektor skild från noll och betrakta linjen

$$\ell = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \langle b, p \rangle = 1\}.$$

Om det restrangerade optimeringsproblemet

$$\min f(x) \text{ under bivillkoret } x \in \ell$$

har en lösning, visa att denna måste vara lika med (3p)

$$x_* = \frac{1}{b^T A^{-1} b} A^{-1} b$$

Bevis. (a): Den mest direkta lösningen är nog att räkna ut att

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

och sedan beräkna derivatorna som vanligt:

$$\text{grad}f(x, y) = \begin{bmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad f''(x, y) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

vilket skulle visas.

En mer elegant lösning är att arbeta med derivatans definition: Vi har för x och h godtyckliga

$$f(x+h) = \frac{1}{2} \langle (x+h), A(x+h) \rangle = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \frac{1}{2} (\langle h, Ax \rangle + \langle x, Ah \rangle) + \frac{1}{2} \langle h, Ah \rangle.$$

Vi ser termen $\frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle$ som är lika med $f(x)$, en term $\frac{1}{2} (\langle h, Ax \rangle + \langle x, Ah \rangle) + \frac{1}{2} \langle h, Ah \rangle$ som beror linjärt på h , och en term $\frac{1}{2} \langle h, Ah \rangle$ som går snabbare mot 0 än $\|h\|$. Därur följer att

$$f'(x)h = \frac{1}{2} (\langle A^T x, h \rangle + \langle Ax, h \rangle) = \langle Ax, h \rangle,$$

där vi använde att A är symmetrisk. Ur detta följer $\text{grad}f(x) = Ax$. Med andra ord beror $\text{grad}f(x)$ linjärt på x , och därur följer $(\text{grad}f)'(x)h = Ah$, alltså $f''(x) = A$.

(b): Villkoret för en kritisk punkt är att $\text{grad}f(x) = Ax = 0$. Eftersom A enligt förutsättning är inverterbar följer därur att endast $x = 0$ är kritisk. För att undersöka vilken typ av kritisk punkt det är behöver vi undersöka $f''(x) = A$. Eftersom A 's samtliga egenvärden enligt förutsättning är positiva så är A positivt definit, och därur följer att punkten är ett lokalt minimum.

(c): Vårt bivillkor är $g(x) = \langle b, x \rangle - 1$. Då

$$\text{grad}g(x) = b \neq 0$$

överallt gäller Lagrange sats. (Likheten ovan visas på samma sätt som i uppgift (a).) Lagrange villkor säger att om x_* är en punkt i vilket det restrangerade optimeringsproblemet har en lösning, så gäller $\text{grad}f(x) = \lambda \text{grad}g(x)$ för ett $\lambda \in \mathbb{R}$. Detta betyder i vårt fall

$$Ax_* = \lambda b, \quad \Rightarrow \quad x_* = \lambda A^{-1}b.$$

Eftersom x_* uppfyller bivillkoret $\langle x_*, b \rangle = 1$ får vi

$$\langle x_*, b \rangle = \langle \lambda A^{-1}b, b \rangle = 1,$$

så att $\lambda = \langle A^{-1}b, b \rangle^{-1}$. Det följer alltså

$$x_* = \frac{1}{\langle A^{-1}b, b \rangle} A^{-1}b,$$

vilket skulle visas. □

Uppgift 5

(7p)

Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}.$$

- (a) Beräkna tangentialintegralen av $\mathbf{v}$ längs enhetscirkeln, som genomlöps i matematiskt positiv riktning. (3p)
- (b) Är $\mathbf{v}$ ett konservativt vektorfält? (2p)
- (c) Låt nu $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en deriverbar funktion och låt

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \nabla \phi.$$

Vad kan sägas om integralen av $\mathbf{w}$ längs enhetscirkeln? (2p)

Bevis. (a): En parametrisering av enhetscirkeln C ges av

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Den här parametriseringen genomlöper vidare C i matematiskt positiv riktning. Vi har

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Därför följer

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

(b): Eftersom C är en sluten kurva så hade ovanstående integral, om $\mathbf{v}$ hade varit konservativt, varit noll. $\mathbf{v}$ är alltså inte konservativt.

Man kan också räkna efter att integrabilitetskriteriet

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

inte är uppfyllt. Observera dock att $\nabla \times \mathbf{v}$ inte är definierat, då rotationen bara är definierat för vektorfält i rummet.

(c): $\mathbf{w}$ är per definition ett konservativt vektorfält. Därför är enligt resonemanget i (b) $\int_C \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Därför gäller

$$\int_C (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi + 0 = 2\pi.$$

□

Uppgift 6

(6p)

Låt D vara den delen av enhetscirkeln som ligger ovanför grafen till funktionen $y = |x|$. Betrakta integralen

$$\iint_D \sin(x)xy \ln(1 + |xy|) dA(x, y).$$

(a) Beskriv hur man med hjälp av MATLAB kan räkna ut integralen utan variabelsubstitution.

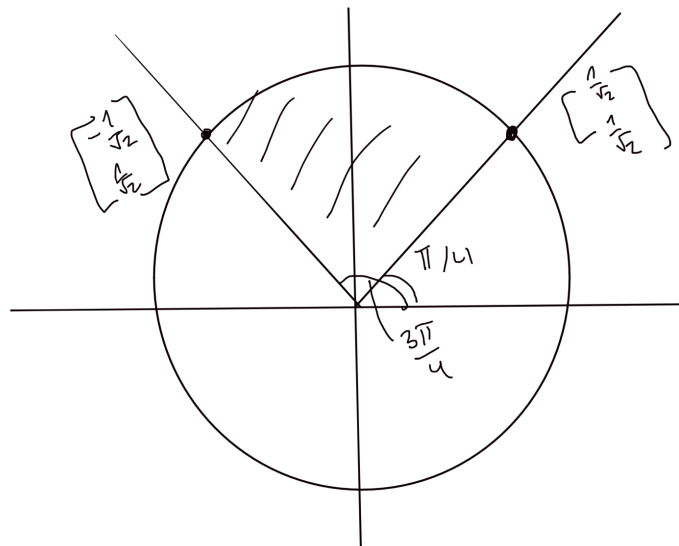
(3p)

- (b) Transformera integralen till polärkoordinater, och beskriv hur den nya integralen kan räknas ut med hjälp av MATLAB. (3p)

Bevis. (a): Vi lägger först in ett funktionshandtag för funktionen vi vill integrera

```
> f = @(x,y) sin(x).*x.*y.*log(1+abs(x.*y));
```

Observera att den naturliga logaritmen skrivs som `log` i MATLAB.



Vi bestämmer nu gränserna för vår integral. Vi väljer x som vår yttre variabel. Eftersom de $y = |x|$ ges av de två strålarna med vinkel $\pi/4$ respektive $3\pi/4$ från x -axeln så ges skärningspunkterna mellan $y = |x|$ och enhetscirkeln av $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ och $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. x går alltså mellan $-1/\sqrt{2}$ och $1/\sqrt{2}$. För varje x går sedan y mellan $|x|$ och $\sqrt{1-x^2}$.

Vi får MATLAB att räkna ut ovanstående med kommandot

```
> integral2(f,-1/sqrt(2), 1/sqrt(2), @(x,y) abs(x), @(x,y) sqrt(1-x.^2))
```

Viktigt här är att vi måste ge funktionshandtag till MATLAB, att skriva

```
> integral2(f,-1/sqrt(2),1/sqrt(2),abs(x), sqrt(1-x^2))
```

kommer alltså inte att fungera. Vi kan såklart också först definiera funktionshandtag för den undre och övre y -gränsen, och sedan stoppa in dessa i `integral2` enligt

```
> ymin = @(x,y) abs(x);
> ymax = @(x,y) sqrt(1-x.^2);
> integral2(f,-1/sqrt(2), 1/sqrt(2), ymin,ymax)
```

(b): Vi genomför först variabelbytet. Som tidigare diskuterat så behöver vi bara låta θ gå mellan $\pi/4$ och $3\pi/4$ i den transformerade integralen, men för varje vinkel så måste r gå mellan 0 och 1. Eftersom $dx dy = r dr d\theta$ och $x = r \cos(\theta)$ och $y = r \sin(\theta)$ blir integralen alltså

$$\int_0^1 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin(r \cos(\theta)) \cdot r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \ln(1 + |r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)|) \cdot r d\theta dr$$

Detta kan vi nu räkna ut med MATLAB med hjälp av kommandona

```
> f = @(r,t) sin(r.*cos(t)).*r.^3.*cos(t).*sin(t).*log(1+abs(r.^2.*sin(t).*cos(t)))
> integral2(f,0,1,pi/4,3*pi/4)
```

Observera att vi här inte behöver definiera några funktionshandtag för gränserna, då de är konstanta. $\square$

Uppgift 7

(6p)

Det endimensionella randvärdesproblemet

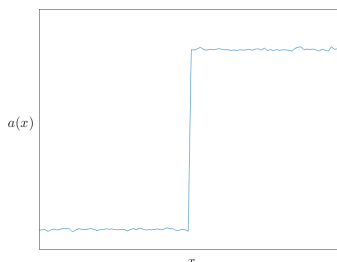
$$\begin{cases} -D(a(x)Du(x)) &= f(x), & x \in (0, L) \\ u(0) &= 0 \\ aDu(L) &= 0 \end{cases}.$$

beskriver temperaturen i en stång som utsätts för en inre källtäthet f . Stången har längden L , varierande värmeledningstäthet a och en oisolerad ände vid $x = 0$.

(a) Vad är den fysikaliska tolkningen av randvillkoret vid $x = L$? (1p)

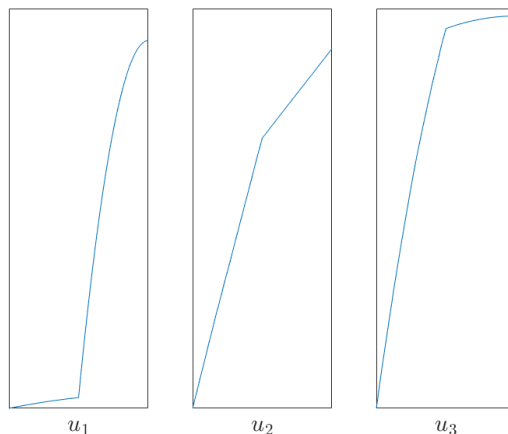
(b) Lös randvärdesproblemet (analytiskt) för fallet att a och f är konstanta. (4p)

(c) Betrakta nu fallet att a är strikt positiv överallt och varierar enligt Figur 1.



Figur 1: Värmeledningskoefficienten a

Om f fortfarande är lika med en positiv konstant, vilken av de följande tre funktionerna är då lösningen till randvärdesproblemet? Motivera ditt svar. (1p)



Bevis. (a): Vi har ett homogent rent Neumannvillkor. Ett rent Neumannvillkor innebär att änden är perfekt isolerad, och att vi det är homogent (alltså att högerledet är 0) innebär att vi inte tillför någon extern värme vid änden.

(b): Differentialekvationen lyder $-D(aDu) = f$, där a och f är konstanta. Analysens huvudsats ger att

$$-aDu(x) = fx + C$$

för en konstant C . Vårt randvillkor $aDu(L) = 0$ ger att $C + fL = -aDu(L) = 0$, alltså $C = -fL$, och därmed

$$aDu(x) = f(L - x) \quad (1)$$

Därur följer $Du(x) = \frac{f}{a}(L - x)$, och därför

$$u(x) = -\frac{f}{2a}(L - x)^2 + A$$

för en konstant A . Vårt randvillkor $u(0) = 0$ ger nu att $A = \frac{fL^2}{2a}$. Lösningen blir alltså

$$u(x) = \frac{f}{2a}(L^2 - (L - x)^2).$$

(c): Vi kan direkt utesluta funktionen u_2 , eftersom dess derivata i $x = L$ inte är noll – den uppfyller således inte randvillkoret $aDu(L) = 0$. För att resonera oss fram till om u_1 eller u_3 är lösningen, låt oss studera sambandet (1), som fortfarande gäller. Denna säger $Du(x) = f(L - x)/a$. Eftersom a är mindre för små värden på x måste därför Du stort när x är litet. Därför måste lösningen till randvärdesproblemet ges av u_3 . $\square$

Uppgift 8

(6p)

Låt $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ vara en matris med element a_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$. Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax.$$

(a) Bevisa att

(3p)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

(b) Låt nu K vara enhetskuben $[0, 1]^3$. Beräkna flödesintegralen genom enhetskubens randyta ∂K

$$\iint_{\partial K} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S},$$

där ytelementet antas vara riktat ut ur K .

(3p)

Bevis. (a) Den enklaste lösningen är nog återigen att räkna ut allt i koordinater. Vi har

$$\mathbf{v}(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix},$$

så att

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

En elegantare lösning är att konstatera att eftersom $\mathbf{v}$ är linjär så ges dess Jacobimatrix i varje punkt av A . Eftersom $\operatorname{div} \mathbf{v}$ är summan av diagonalelementen i A följer det att $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

(b): Gauss sats ger

$$\begin{aligned} \iint_{\partial K} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_K \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dV = \iiint_K (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \, dV \\ &= (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \operatorname{vol}(K) = (a_{11} + a_{22} + a_{33}), \end{aligned}$$

då enhetskuben har volym 1.

□